
1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

CALCVLI
DIFFERENTIALIS ET INTEGRALIS
INSTITVTIO,

QVAM

IN TIRONVM VSVM

ELVCVBRATVS EST

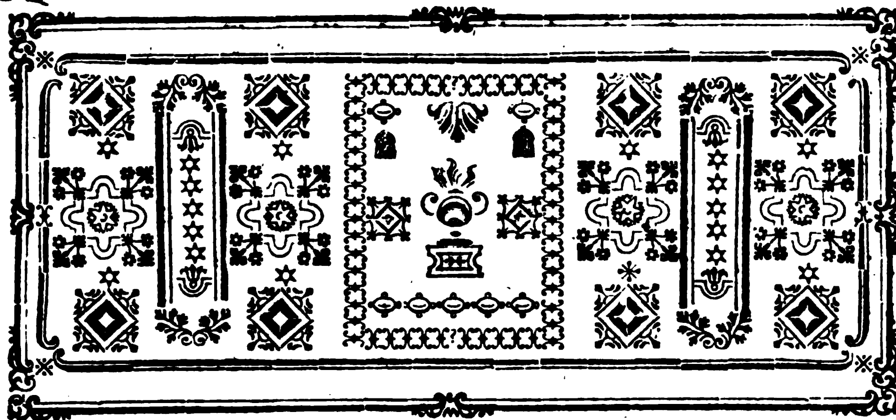
P. MAKO E S. I.



VINDOBONAE,

TYPIS IOANNIS THOMAE NOB. DE TRATTNERN,
SAC. CAES. REG. AULAE TYP. ET BIBL.

ANNO M DCC LX VIII.



PRAEFATIO.



Cum id mihi iam pridem dedissem negotii, vt rem literariam inter adolescentes omni, quo possem opere proueherem, eoque consilio aliquot opuscula typis iam vulgauissem, coepi egomet mecum interdum disquirere, quidnam in caussa esset, quod iuuenes nostri primis matheseos elementis initiati in his plerumque adhaerescerent, nec nisi perpauci ad sublimiora, magisque recondita eluctarentur.

Videbam sane non deesse duces praestantissimos, qui maiorum inuenta nouis accessionibus cumularent, inque vnum corpus coacta dilucide ex-

plicarent. Haerebant cumprimis ante oculos eruditae de calculo, vt vocant, infiniteſimorum lucubrationes, his iisdem typis ante triennium editae, ac late vndique peruagatae: neque tamen animaduertebam acriores inde ſtimulos animis adoleſcentum iniici ad capeſſenda ea ſtudia, quorum ſalebroſi aditus ſatis iam complanati videbantur.

Haec cum, vt dixi, et ego apud me ſaepe cogitarem, et amicorum ſermone iactari intelligerem, coepi vereri magnopere, ne languor ille, ne dicam deſperatio, hinc potiſſimum exſiſteret, quod viri illi praeſtantiſſimi alii quidem tironem ab elementis non tam gradatim traducere, quam vno velut impetu ad recondita matheſeos adita rapere: alii a primis quidem illi rudimentis exorſi pedetentim progredi, ſed magno, atque ſumtuoſo voluminum adparatu terrorem potius, quam animos addere videantur.

Vtcunque iſta ſint, ego amicorum cohortationibus, ac pene conuiciis adductus malo vtrique pro viribus ſubuenire, opusque adornare ſtatui, quod cum facile parabile eſſet, tum adoleſcentes a primis elementis ad euoluendos, atque adeo intel-

ligendos aliorum commentarios manu quodammodo duceret. Quare cum infinitesimorum calculus sit veluti quaedam ianua interiores matheseos recessus patefaciens, sisto hic volumen primum, in quo prima vtriusque methodi lineamenta sic adumbrata sunt, vt a tirone physicae hodiernae, atque conicarum sectionum elementis probe instituto facile intelligi, hisque intellectis sublimiores aliorum lucubrationes inoffenso pede decurri possint. Consequetur alterum, de analyticis, et geometricis aequationum resolutionibus.

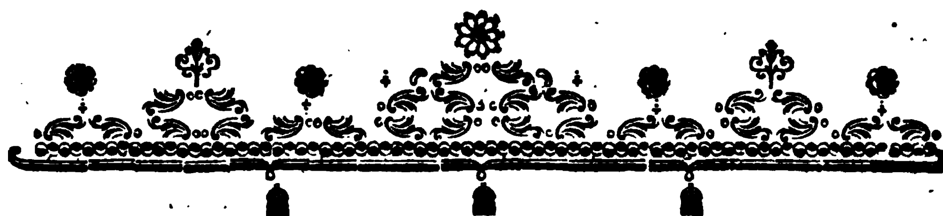
Adieci complura problemata, non e geometria solum depromta, sed e mechanica etiam, ac reliqua physica, eo potissimum consilio, vt et calculi vsus exercitatione ipsa fiat sensim familiarior, et iam nunc prospicere iuuenes possint, quam praeclaros vsus in ceteris disciplinis haec scientia habeat: quae vna cogitatio non modo suscepti laboris taedium mitigabit, sed auiditatem quoque maiorem in modum excitabit.

Quia res ipsa postulat, vt lector algebrae, ac geometriae rudimentis iam imbutus sit, sicubi occurret mentio elementorum (occurret autem non infrequenter) consulenda erit Compendiaria Ma-

thefeos Inftitutio, quam in tironum vfum paucos ante annos adornaui. Tantum eft lector beneuole: Vale.

Dabam Vindobonae in Colleg. Reg. Theref.





INDEX CAPITVM.

LIBER PRIMVS

De Calculo Differentiali.

SECTIO I

De primis Functionum variabilium Differentialibus.

CAPVT I

CAPVT II

CAPVT III

CAPVT VI

SECTIO III

De secundis functionum variabilium Differentialibus, deque multiplici eorundem vsu.

CAPVT I

CAPVT II.

CAPVT III

CAPVT IV

CAPVT V

)()(

LIBER SECVNDVS

De Calculo Integrali.

SECTIO I

De methodis integrandi functiones differentiales.

CAPVT I

CAPVT II

CAPVT III

CAPVT IV

CAPVT V

SECTIO II

De vsu Calculi Integralis in Geometria.

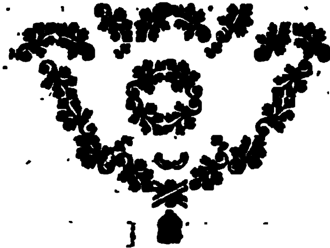
SECTIO III

De multiplici Calculi Integralis vsu in Mechanica, et Physica.

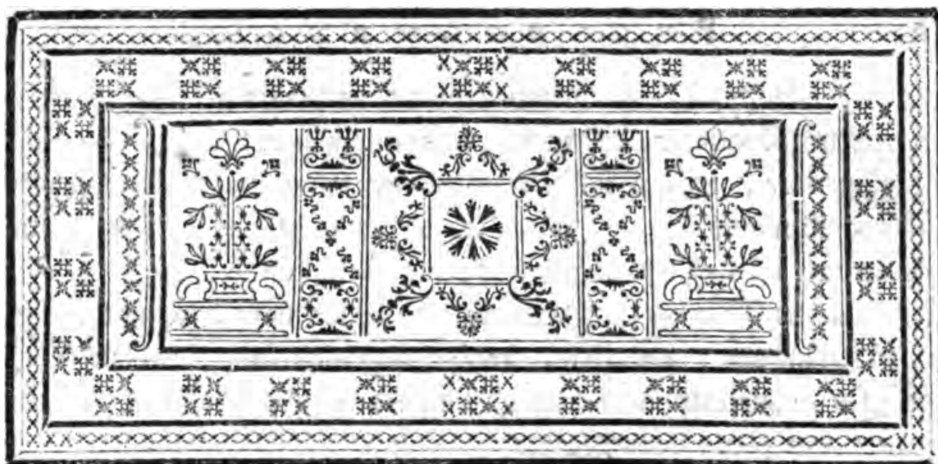
CAPVT II

CAPVT III

CAPVT IV



PRO-



PROLEGOMENON.

I.

Quantitas certis limitibus determinata, seu cuius magnitudo assignari potest, *finita* dicitur: illa vero, quae vltra quosuis limites aucta concipitur, seu cuius magnitudo nullos habet terminos, *infinita* vocatur: quae denique infra quosuis limites diminuta concipitur, seu cuius paruitas nullos habet terminos, *infinitesima* adpellatur.

Quantitatem infinitam signo ∞, infinitesimam signo $\frac{1}{\infty} = \infty^{-1}$ designari vulgo notum est.

2. *Coroll.* Igitur infinitesimum in finito, et hoc in infinito, infinitis vicibus continetur: hinc $\frac{a}{\infty} : a = a : \infty$.

Scholion. Posse a nobis concipi quantitates infinitesimas in aperto est. Cum enim quantitas continua mathematica infinite diuidua sit, concipi sane in ea possunt partes quauis assignabili mi-

nores. Dum item quantitates duae inaequales ad aequalitatem perpetuo accedere cogitantur, antequam prorsus aequales fieri intelligantur, earum differentia infinite minuitur, ita vt quauis
Fig. 1. assignabili minor fit. Sit curua quaepiam continua A M *m*, cuius ordinatae PM et *pm* cogitentur ad se continenter accedere, donec punctis M et *m* congruentibus aequales fiant, ac recta TS euadat tangens: antequam omnino aequales fiant, rectae MQ et Q*m* minuentur vltra quosuis limites, et punctis M et *m* congruentibus plane euanescent.

3. Si ad quantitatem finitam, et infinitam quaeratur tertia proportionalis, erit ea infinities infinita, seu infinita *secundi ordinis*, cum in ea quantitas infinita infinitis vicibus contineatur. E. g. Si sit $a : \infty = \infty : \frac{\infty^2}{a}$, erit $\frac{\infty^2}{a}$ quantitas infinita secundi ordinis. Similiter si ad quantitatem infinitam primi ordinis, et ad infinitam secundi ordinis quaeratur tertia proportionalis, erit ea infinities infinities infinita, seu infinita *tertii ordinis*, cum in ea quantitas infinities infinita infinitis vicibus contineatur. E. g. Si sit $\infty : \frac{\infty^2}{a} = \frac{\infty^2}{a} : \frac{\infty^3}{a^2}$ erit $\frac{\infty^3}{a^2}$ quantitas infinita tertii ordinis, et sic porro. Vnde adparet innumeros posse concipi infinitorum ordines.

4. *Coroll.* Cum quodlibet infinitum inferioris ordinis infinities contineatur in infinito immediate superioris ordinis, illud respectu huius spectari potest vt finitum, et hoc respectu illius vt infinitum primi ordinis. E. g. ∞^m respectu ∞^{m+1} potest spectari vt finitum, et ∞^{m+1} respectu ∞^m vt infinitum primi ordinis.

5. Si ad quantitatem finitam, et infinitesimam quaeratur tertia proportionalis, erit ea infinities infinite parua, seu infinitesima *secundi ordinis*, cum in quantitate infinitesima infinitis vici-

bus contineatur. E. g. Si ſit $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$, erit $\frac{1}{\infty^2}$ quantitas infiniteſima ſecundi ordinis. Similiter ſi ad quantitatem infiniteſimam primi ordinis, et ad infiniteſimam ſecundi ordinis quaeratur tertia proportionalis, erit ea infinities infinities infinite parua, ſeu infiniteſima *tertii ordinis*, cum in quantitate infinities infinite parua infinitis vicibus contineatur. E. g. Si ſit $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty^3}$, erit $\frac{1}{\infty^3}$ quantitas infiniteſima tertii ordinis, et ſic porro. Vnde patet innumeros poſſe concipi infiniteſimorum ordines.

6. Cum quaeuis quantitas infiniteſima ſuperioris ordinis infinitis vicibus contineatur in infiniteſima ordinis immediate inferioris, haec reſpectu illius vt finita ſpectari poteſt, et illa reſpectu huius vt infiniteſima primi ordinis. E. g. $\frac{1}{\infty^m}$ reſpectu $\frac{1}{\infty^{m+1}}$ ſpectari poteſt vt quantitas finita: et haec reſpectu illius vt infiniteſima primi ordinis.

Scholion. 1. Vt hos infiniteſimorum ordines tiro clarius peruideat, ſit arcus circuli infiniteſimus primi ordinis BD, erit etiam eiusdem ſinus rectus DE infiniteſimus eiusdem ordinis. Radio CD producto occurrat in G tangens BG, ac ducatur recta DF ad CB parallela, erit ſinus verſus BE infiniteſimus ſecundi ordinis, et GF differentia tangentis et ſinus recti erit infiniteſima tertii ordinis. Nam ex natura circuli AE : ED = ED : BE (Elem. 420.); cum ergo AE ſit quantitas finita, ED infiniteſima primi ordinis, erit BE infiniteſima ſecundi ordinis (5). Ad haec ob triangula CDE, DGF ſimilia eſt CE : DE = DF ſeu BE : GF; ſicut ergo quantitas finita CE infinitis vicibus continet in ſe infiniteſimam DE, ita infiniteſima ſecundi ordinis BE infinitis vicibus continet in ſe rectam GF, quae proinde eſt infiniteſima tertii ordinis. *Fig. 2.*

Sholion. 2. Quae de infinitorum, et infinitesimorum ordinibus dicta sunt, iuuat vno velut obtutu denuo contemplari. Ponamus igitur quantitatem quampiam mutabilem x primo quidem fieri infinitam; deinde infinitesimam: et videamus, quidnam vtraque in hypothesi euenire debeat eiusdem potentiis et radicibus.

Imprimis si x infinita euadat, 1) Potentiae eiusdem perfectae x^1, x^2, x^3, x^4, etc. ordine sese excipientes, ac exponentes positiuos habentes erunt infinitae ordinum continenter crescentium: sunt enim in continua proportione. 2) Potentiae eiusdem imperfectae pariter exponentis positiui, seu radices ordine sese excipientes $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{4}}$ etc. id est $\sqrt[2]{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ etc. primum quidem erunt infinitae; secus radix finita in se ipsam aliquoties ducta gigneret quantitatem infinitam x, quod absurdum est: deinde radices hae erunt infinitae ordinum continenter decrescentium: est enim $x : \sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{x} : 1$; $\sqrt[2]{x} : \sqrt[3]{x}$, seu $\sqrt[6]{x^3} : \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{x} : 1$ etc. 3) Potentiae eiusdem perfectae exponentis negatiui ordine sese excipientes x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4} etc. erunt infinitesimae ordinum continenter crescentium: his enim aequiualent $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$ etc. 4) Potentiae eiusdem imperfectae exponentis negatiui ordine sese excipientes $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{1}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$ etc. erunt infinitesimae ordinum continenter decrescentium: his enim aequiualent $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ etc.

Sin autem quantitas mutabilis x euadat infinite parua, 1) Potentiae eiusdem perfectae exponentis positiui ordine sese excipientes x^1, x^2, x^3, x^4 etc. erunt infinitesimae ordinum continenter crescentium: sunt enim in continua proportione. 2) Poten-

tiae eiusdem imperfectae exponentis positiui, seu radices ordine sese excipientes $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{4}}$ etc. seu $\sqrt[2]{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ etc. primum quidem erunt omnes infinitesimae; secus radix finita in seipsam aliquoties ducta gigneret quantitatem infinitesimam x, quod absurdum est: deinde radices hae erunt infinitesimae ordinum continenter decrescentium: est enim $x : \sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{x} : 1$; $\sqrt[2]{x} : \sqrt[3]{x}$, seu $\sqrt[6]{x^3} : \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{x} : 1$ etc. 3) Potentiae eiusdem perfectae exponentis negatiui ordine sese excipientes x^{-1}, x^{-2}, x^{-3} etc. erunt infinitae ordinum continenter crescentium: his enim aequiualent $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ etc. 4) Denique potentiae eiusdem imperfectae exponentis negatiui ordine sese excipientes $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{1}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$ etc. erunt infinitae ordinum continenter decrescentium: his enim aequiualent $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ etc.

7. Cum quantitas infinitesima vltra quosuis limites assignabiles diminui posse concipiatur (1), eadem respectu quantitatis finitae euanescit, seu nihilo aequalis poni potest. Cumque $\frac{1}{\infty}$, 1, ∞, ∞^2, ∞^3 etc. Sint in continua proportione, et $\frac{1}{\infty}$ respectu 1 euanescat, etiam 1 respectu ∞, et ∞ respectu ∞^2, ac generatim quantitas finita respectu infinitae, infinita inferioris ordinis respectu infinitae superioris ordinis euanescit. Similiter quia 1, $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ etc. Sunt in continua proportione, et $\frac{1}{\infty}$ respectu 1 euanescit, etiam $\frac{1}{\infty^2}$ respectu $\frac{1}{\infty}$, item $\frac{1}{\infty^3}$ respectu $\frac{1}{\infty^2}$, et generatim infinitesima altioris ordinis respectu infinitesimae ordinis inferioris euanescit.

8. *Coroll.* Quoniam $\frac{1}{\infty} = 0$, erit $1 : 0 = 1 : \frac{1}{\infty} = 1 : \frac{0}{1}$, adeoque $\frac{0}{1}$ in ſerie quantitatum decreſcentium deſignat infiniteſimam. Et quia $\frac{1}{\infty} : 1 = 1 : \infty$, erit $0 : 1 = 1 : \infty$; vnde $\frac{1}{0} = \infty$; hinc $\frac{1}{0}$ in ſerie quantitatum creſcentium denotat infinite magnam.

Scholion. Diligenter animaduertat tiro rigorem demonſtrationum nequaquam labefactari, dum quaedam quantitates reſpectu aliarum euaneſcentes in calculo negliguntur; adparebit enim in ſequentibus, vbi vſum infiniteſimorum ad curuas adplicabimus, quantitates eiusmodi, dum negliguntur, re vera abire in nihilum, atque adeo nihil plane in calculo negligi. Sic quamdiu recta *Fig.* 1. TS ſecans eſt, quantitates infiniteſimae MQ et *m*Q re vera ſunt aliquid, ac proinde neque ipſae, neque earum potentiae poſſunt in calculo negligi: at ſi cogitentur puncta M et *m* confundi, ſeu ſecans in tangentem abire, tunc enimuero ordinatae PM et *pm* congruent, adeoque infiniteſimae MQ et *m*Q euaneſcent; atque in hoc, et ſimili caſu ſolent infiniteſimae negligi. Ceterum paſſim apud autores proſtant apologiae, quibus methodo infiniteſimorum rigor geometricus vindicatur. Legi cumprimis meretur Encyclopaedia ad vocem *differentiale.*

Audiamus Boſcouichium hac ipſa de re diſſerentem. „ Quoties, inquit, in comparandis binis quantitatibus finitis, contemnendo aliqua, quae reſpectu earum ſunt infinite parua, inuenitur aequalitas, toties vera aequalitas haberi debet, nec vllus, ne infiniteſimus quidem, error inde oriri poteſt. Finitae enim quantitates ſunt eae, quae in ſe determinatae ſunt; infinite paruae quantitates ſunt eae, quae concipiuntur minui ad arbitrium vltra quoscunque limites in ſe determinatos. Porro

„ contemtus quantitatum infinitesimarum in comparatione quanti- „ tatum finitarum nullum errorem parere potest, ne infinitesi- „ mum quidem. Nam si illae finitae quantitates essent inaequa- „ les, haberent differentiam aliquam in se determinatam. Quo- „ niam autem illae quantitates infinitesimae possunt minui vltra „ quoscunque limites in se determinatos, poterunt simul omnes „ esse minores, quam illa differentia supposita, quam idcirco „ compensare non possent, nec posset ex illarum contemtu de- „ riuari aequalitas quantitatis illius in se determinatae, nimirum „ differentiae suppositae.

„ Id exemplo sequenti fiet magis manifestum. Sint in bi- „ lance hinc inde bini lapides inclusi cum liquoribus quibusdam, „ qui liquores perpetuo debeant effluere, vel euaporari, do- „ nec penitus euanescant. Concipiamus nos nescire, vtrum la- „ pidum pondera aequalia sint, vtrum liquores illis pondus ad- „ dant, an auferant, vtrum aeque effluant; scire tamen haec „ duo: donec aliquid liquorum superérit haberi debere aequili- „ brium, et liquores debere imminui vltra quoscunque limites in „ se determinatos, cum nimirum debeant penitus euanescere. Ex „ his binis veritatibus inferre licebit lapides aequalis ponderis es- „ se, liquores vel aeque augere, vel aeque minuere ipsorum „ pondera, et aequaliter effluere. Si enim ii lapides non aeque „ ponderarent, esset aliqua in ipsorum ponderibus differentia in „ se determinata. Quoniam igitur liquores debent minui vltra „ quoscunque limites in se determinatos, aliquando simul omnes „ addent, vel auferent minus ponderi, quam sit illa differentia „ supposita. Igitur tunc illam differentiam compensare non pos- „ sent, nec aequilibrium haberetur, quod est contra hypothesim. „ Si igitur donec adsunt liquores, aequilibrium habetur, et ii in „ infinitum minuuntur, oportet lapides ipsi aequales sint. Qua-

„ re cum ipſi lapides, et liquores ſimul aeque ponderent, ipſi
„ liquores aequalia pondera vel addunt, vel demunt, adeoque
„ et aeque effluunt.

„ Iam vero lapides illi referunt quantitates finitas, ſiue in
„ ſe determinatas; liquores illi referunt quantitates infiniteſimas,
„ quibus contemtis, ſi finitae quantitates aequales inueniuntur, re-
„ ipſa debent eſſe accurate aequales, et infiniteſimae illae quan-
„ titates, quae contemnuntur, debent ſe mutuo compenſare.
„ Nam niſi illa quantitatum finitarum aequalitas haberetur, con-
„ temtus ipſarum decreſcentium vltra quoscunque limites non poſ-
„ ſet compenſare ipſarum differentiam tum, dum infra ipſam diffe-
„ rentiam imminuerentur. ---- Quod autem de binis quantitatibus
„ aequalibus dictum eſt, facile traducitur ad quantitates quamcun-
„ que rationem habentes ad ſe inuicem. Nam ſi eam rationem ac-
„ curate non haberent, addendum eſſet aliquid in ſe determina-
„ tum alteri, vel demendum alteri, vt eam aſſequerentur: quae
„ autem contemnuntur, cum decreſcere poſſint infra id, quod
„ addendum, vel demendum eſſet, non poſſunt eius vicem ſup-
„ plere, et eam rationem oſtendere, quae ex ipſorum contemtu
„ deriuatur „. Haec ille in Elem. Solid. a n. 113.

9. Quantitates, quae aliis nullam mutationem ſubeuntibus, per gradus quosdam momentaneos creſcunt, vel decreſcunt, *variabiles*; quae vero ſemper eaedem manent, *conſtantes* adpellantur. Illae poſtremis, hae primis alphabeti literis ſolent deſignari. Sic in ellipſi parameter, et axes ſunt quantitates conſtantes: abſciſſae contra, et iisdem reſpondentes ordinatae ſunt variabiles.

10. Incrementa, vel decrementa momentanea, ſeu infiniteſima quantitatum variabilium *differentialia* vocantur, quae nos libro ſecundo paſſim quantitatum finitarum *elementa* dicemus; ac me-

methodus eadem inueniendi *calculus differentialis* nuncupatur. E. g. Si ordinatae cuiuis PM concipiatur duci altera *pm* infinite propinqua, agaturque MR ad AP parallela, abscissa AP abeunte in A*p*, ordinata PM abit in *pm*, et arcus AM in A*m*; hinc P*p* = MR est differentiale abscissae AP, R*m* differentiale ordinatae PM, M*m* differentiale arcus AM. *Fig.* 3.

11. *Coroll.* Cum ergo quantitatibus variabilibus vtcunque mutatis constantes nec crescant, nec decrescant, palam est nulla esse, seu nihilo aequari earum differentialia.

12. Porro ipsa etiam quantitatum variabilium differentialia aut constanter eadem permanent mutatis variabilibus, aut momentanea incrementa vel decrementa capiunt: si primum, sunt quantitates constantes; si alterum, sunt variabiles, ac proinde sua rursus habent differentialia. E. g. Si abscissae AP differentiale P*p* constanter idem maneat, seu sit P*p* = *pp*, ordinatae PM differentiale R*m* continenter decrescit: hinc differentiale P*p* est quantitas constans, R*m* variabilis; ac si per puncta M et *m* ducatur secans SF, et R*m* producatur, donec secanti SF occurrat in puncto O, erit R*m* = RO, adeoque *m*O erit differentialis R*m* differentiale. *Fig.* 4.

13. Quantitatum finitarum differentialia vocantur *prima*; horum iterum differentialia adpellantur *secunda*, vel secundi ordinis, et sic porro: calculus autem differentialium secundorum vulgo *differentio-differentialis* audit. Ita in figura superiore ordinatae PM differentiale primum est R*m*, secundum *m*O.

Scholion. Quemadmodum infinitesimorum, ita differentialium innumeri dantur ordines, ad quos accommodari possunt ea omnia, quae in superioribus de infinitesimorum ordinibus dicta sunt: nos vltra differentialia secunda in hoc opere non progrediemur. Quidam quantitatem variabilem concipiunt motu continuo

fluere, ac *fluentem* propterea nuncupant; incrementum vero aut decrementum, quod dato tempore per eum motum generaretur, si is post datum terminum vniformiter continuaretur absque vlla acceleratione vel retardatione, adpellant *fluxionem*. Sic dum
Fig. 3. abscissa AP fluxu continuo abit in A*p*, et ordinata PM in *pm*, fluxio areae APM non est spatiolum PM*mp*, sed rectangulum PMR*p*, quod scilicet generaretur, si post terminum P motus tempusculo dato vniformiter continuaretur. Hi modo loquendi a nobis dissentiunt, re congruunt: nam et nos in calculo PMR*p* sumimus pro differentiali, seu elemento areae APM, neglecto spatiolo MR*m*, vti adparebit in sequentibus.

14. Quemadmodum elementa infinitesima quantitatum variabilium dicuntur earundem differentialia, ita quantitates ipsae variabiles comparatae ad sua elementa infinitesima, e quorum summa coalescunt, adpellantur *integrales*: et hinc *calculus integralis* est methodus inueniendi datorum differentialium integralia: seu est methodus e datis differentialibus eruendi eas quantitates, ad quas data illa differentialia pertinent: vt si e data expressione differentiali elementi PMR*p* quaeratur area APM, quae dati
Fig. 3. elementi integrale est.

15. *Coroll.* 1. Quare calculus integralis requirit operationes differentiali contrarias, vnde et *methodus inuersa* calculi infinitesimalis dicitur. Nimirum calculus infinitesimalis *directus* seu differentialis a finitis quantitatibus datis descendit ad infinitesimas: integralis a datis infinitesimis ascendit ad finitas; ille quantitates finitas in sua elementa dissoluit; iste quantitates dissolutas rursus componit ex elementis.

16. *Coroll.* 2. Integralis legitime inuenti argumentum est, si repertum integrale restituat ope calculi differentialis quantitatem ad integrandum propositam. Similiter legitime inuenti diffe-

rentialis indicium eſt, ſi repertum differentiale reſtituat ope calculi integralis quantitatem ad differentiandum propoſitam. Vnde duo hi calculi ſe mutuo comprobant, eo plane modo, quo eleuationem ad potentiam radicis extractio, et radicis extractionem ad potentiam eleuatio.

Scholion. Sicut data quaeuis quantitas euehi poteſt ad quamuis potentiam deſideratam, nequit autem viciſſim e data quauis potentia quaeuis radix extrahi: ita plane quaeuis data quantitas accurate differentiari poteſt, non item integrari: hinc calculum differentialem habemus perfectum, integralem admodum imperfectum, ſuntque propemodum innumerabiles calculi integralis regulae, pro varietate ſcilicet formularum ad integrandum propoſitarum; quibus tamen ipſis regulis nondum omnes omnino formulae integrandae ſubiici potuerunt. Quare ſicut in radicum extractionibus, dum eae accurate haberi nequeunt, recurrimus ad ſeries infinitas, quarum ope ad veras radices, quantum libet, adproximamus: ita plane ad easdem ſeries confugimus, vbi integrale exactum reperire haud poſſumus, id quod in ſecundo libro exempla declarabunt.

17. Differentiale quantitatis variabilis deſignari ſolet litera d quantitati ipſi praefixa; vnde in ſequentibus confuſionis vitandae cauſſa omni alio huius literae vſu abſtinebimus. E. g. differentiale quantitatis x eſt dx: differentiale quantitatis dx eſt $ddx = d^2x$. Et quia integrale e ſumma infinitorum differentialium coaleſcit, deſignari ſolet litera s quantitati differentiali praefixa, quae idcirco in calculo integrali alium ſignificatum non habebit. E. g. $s\,(adx - 2xdx)$ exprimit integrale, quod e ſumma differentialis $adx - 2xdx$ conſurgit, ſeu exhibet quantitatem $ax - x^2$, cuius differentiale, vti deinceps videbimus, eſt $adx - 2xdx$.

Scholion. Quando compositae quantitates occurrunt, diligenter aduertendum est a litera praefixa d eam duntaxat quantitatem literalem affici, cui immediate praefigitur. Quod si plures simul quantitates afficere debeat, eae parenthesi includi solent, aut lineola superne necti, vt fit in radicum expressionibus. E. gr. in hac formula $dxay$ litera d solam quantitatem x afficit: in hac $d\,(axy)$ afficit totum factum axy. Similiter $d^2y = ddy$ designat differentiale secundum quantitatis y, vel primum quantitatis dy : $dy^2 = dy\,.\,dy$ exprimit quadratum ex dy : $d\,(y^2)$ indicat differentiale primum quadrati y^2 : $d\,(a+x)^2$ est quadratum differentialis primi quantitatis $a+x$: $d\,\overline{(a+x)}^2 = d\,((a+x)^2)$ est differentiale primum quadrati $(a+x)^2$: $d^2\,(xy) = dd\,(xy)$ est differentiale secundum facti xy, et sic de aliis.

18. Dum quantitatis cuiusdam logarithmum denotare volumus, literam l eidem praefigimus. E. g. lx indicat logarithmum quantitatis x : $l\,\overline{(a+x)}^2 = l\,((a+x)^2)$ indicat logarithmum quadrati $(a+x)^2$: $l\,(a+x)^2$ quadratum logarithmi quantitatis $a+x$: $ll\,(x^2)$ logarithmum logarithmi quadrati x^2 : $dl\,(x^2+y^2)$ differentiale logarithmi quantitatis x^2+y^2, et sic porro.

19. Dum quantitas aliqua complexa eleuata esse indicatur ad aliquam potentiam cuiuscunque demum exponentis, dicitur illa quantitas esse *sub signo*: quantitas vero eum in modum non eleuata, per quam multiplicatur quantitas sub signo posita, dicitur esse *extra signum*. E. g. in hac formula $(adx - 2xdx)\,.\,(ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = (adx - 2xdx)\,\sqrt{(ax - x^2)}$, quantitas $(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ est sub signo, et quantitas $adx - 2xdx$ est extra signum. Similiter in hac $\frac{a^2 - x^2}{\sqrt[3]{(2ax - x^2)}} = (a^2 - x^2)\,.\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{3}}$ prior quantitas $a^2 - x^2$ est extra signum, posterior $(2ax - x^2)^{-\frac{1}{3}}$ est sub signo.

20. Denique *functionem* quantitatis cuiuspiam variabilis adpellabimus quamuis aliam quantitatem, quam variabilis illa, vel eius logarithmus aut differentiale quo demumcunque modo ingreditur, siue deinde adsint in functione quantitates constantes, siue non adsint. E. g. functiones quantitatis variabilis x sunt $2x$, $a+x$, $x-a$, ax, $\frac{a}{x}$, $\frac{x}{a}$, x^m, $\sqrt[m]{ax^n}$, $l(ax)$, adx etc. Functiones variabilium xy sunt $xy \pm ay^2$, $\sqrt{(axy \pm bx^2)}$, $xydx + yxdy$, $l(xy - ax^2)$ etc.

21. *Coroll.* Quare functiones ipsae variabilium sunt quantitates variabiles (excepto casu vnico, dum scilicet in functione quantitas variabilis habet pro exponente zerum, ac proinde aequiualet vnitati constanti), possuntque spectari instar vnius simplicis variabilis, nisi forte functio sit differentiale constans quantitatis variabilis. E. g. $\sqrt{(ax - x^2)}$ potest poni $= y$, atque ita functio quaeuis ad simpliciorem expressionem reduci, id quod magno persaepe est vsui.

22. Si quantitas variabilis crescens a semetipsa momentaneo incremento aucta, vel variabilis decrescens a semetipsa momentaneo decremento imminuta subtrahatur, obtinetur eiusdem differentiale. E. g. Sit abscissa $AP = x$, ordinata $PM = y$, *Fig.* 3. cui ducta intelligatur alia infinite propinqua pm, ac recta MR ad AP parallela, erit $Ap = AP + Pp = x + dx$, vnde sublato x remanet $Pp = dx$, nempe differentiale abscissae AP. Similiter erit $pm = PM + Rm = y + dy$, vnde ablato y relinquitur $Rm = dy$, scilicet differentiale ordinatae PM.

23. *Coroll.* Si ergo vna variabilium AP crescente, altera PM decrescat, sitque $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = dx$ positiuum, $mR = -dy$ negatiuum: id est differentiale crescentis negatiuum erit. *Fig.* 5.

Scholion. Atque haec eſt generalis regula datas quantitates variabiles differentiandi, e qua deriuantur varia compendia, et ſpeciales regulae, quas in primo libro perſequemur. Quatuor autem modis poſſunt quantitates variabiles inter ſe, aut cum conſtantibus coniugari: 1) Signo additionis + vel ſubtractionis —: 2) Multiplicatione: 3) Diuiſione, ſeu ſub forma fractionum: 4) Sub forma potentiarum perfectarum, vel imperfectarum ſeu radicalium. De ſingularum coniugationum, ſiue functionum differentialibus inueniendis imprimis agendum erit; tum vſus varii horum differentialium exhibendi; denique explananda ea, quae ad calculum differentialium ſecundorum, vſumque eorundem pertinent: atque haec libro primo. Liber ſecundus calculum integralem complectetur, cum multiplici eiusdem adplicatione.





LIBER PRIMUS

De Calculo Differentiali.

SECTIO PRIMA.

De primis Functionum variabilium Differentialibus.

CAPVT I.

De Differentialibus quantitatum variabilium simplicium, aut signo + vel — copulatarum.

24. *PROBL.* *Differentiare quantitatem simplicem variabilem.*

Resol. Retento signo datae quantitatis variabilis praefigatur eidem litera d: obtinebitur differentiale quaesitum.

Demonst. Quaeuis quantitas simplex variabilis differentianda repraesentari potest per x: augeatur ergo x incremento momentaneo dx, vel minuatur decremento momentaneo $-dx$, habebitur $x \pm dx$, vnde auferendo x restabit differentiale quaesitum $\pm dx$ (22).

25. *Coroll.* Si data variabilis fuerit $-x$, erit eiusdem differentiale $= -dx$.

Scholion. Probe aduertendum hoc loco eſt quantitatem ſimplicem ſolam ſemper eiusdem eſſe valoris, ſiue poſitiua, ſiue negatiua fuerit, cum ſigna $+$ et $-$ non aliud indicent, quam eandem addendam, vel demendam eſſe, ſi alteri conſociata ſit, quin propterea abſolutus eiusdem valor mutetur: ita ſane x, dx, adx non plus ſignificant ſola ſeorſim, quam $-x$, $-dx$, $-adx$. Quare in praeſenti problemate ſolam literalem differentialium expreſſionem attendimus.

26. *PROBL. Differentiare quantitates variabiles ſigno $+$ vel $-$ copulatas.*

Reſol. Capiatur differentiale ſingularum variabilium retentis ſignis, quae in propoſita functione habebant (24): habebitur differentiale quaeſitum.

Demonſtr. Forma huiusmodi quantitatum reduci poteſt ad functionem $\pm x \pm a \pm y$: iam dum $\pm x$ abit in $\pm x \pm dx$, et $\pm y$ in $\pm y \pm dy$, conſtans a manet inuariata; quare functio propoſita mutabitur in hanc $\pm x \pm dx \pm a \pm y \pm dy$, e qua ſi tollatur $\pm x \pm a \pm y$, remanebit differentiale quaeſitum $\pm dx \pm dy$. (22).

EXEMPLA.

I $d\,(x + u - y) = dx + du - dy$.
II $d\,(a^2 - x + b^2) = -dx$.
III $d\,(a + x + bc + y) = dx + dy$.
IV $d\,(a^2 - 2ab + b^2) = 0$.

Scholion. Iuuat in tironum gratiam rem omnem paulo pluribus illuſtrare. Ductis ordinatis PM et *pm* infinite propinquis, ſit

Fig. 2.

sit $PM = y$, $AP = x$; abibit AP in $Ap = AP + Pp = x + dx$, et PM in $pm = PM + Rm = y + dy$: erit ergo $AP + PM = x + y$, et $Ap + pm = x + dx + y + dy$: adeoque $(Ap + pm) - (AP + PM) = (x + dx + y + dy) - (x + y) = dx + dy$: adparet ergo quantitatis $x + y$ differentiale esse $dx + dy$. Similiter erit $AP - PM = x - y$, et $Ap - pm = x + dx - y - dy$, et hinc $(Ap - pm) - (AP - PM) = (x + dx - y - dy) - (x - y) = dx - dy$: id est, differentiale functionis $x - y$ est $dx - dy$.

Si variabiles ambae decrescant, ambarum differentiale negatiuum esse patet e superioribus, et in hac eadem figura facile ostendi potest. Si enim ex parte originis abscissarum A ducatur ordinata qn priori PM infinite propinqua, et nr ad AP parallela, erit $Aq = AP - Pq = x - dx$, et $qn = PM - rM = y - dy$: quare differentiale quantitatis x est $-dx$, et quantitatis y est $-dy$.

Si vna variabilium crescente altera decrescat, differentiale crescentis fore positiuum, decrescentis negatiuum, itidem facile ostenditur. Sit enim abscissa $AQ = x$, ordinata $QM = y$, cui ducta alia qn infinite vicina erit $Aq = AQ + Qq = x + dx$; $qn = QM - rM = y - dy$: patet adeo differentiale crescentis x positiuum, decrescentis y negatiuum esse. Quod si ponatur $Aq = x$, $qn = y$, et huic ex parte originis abscissarum A ducatur alia infinite propinqua QM, erit $AQ = Aq - qQ = x - dx$, et $Qm = qn + rM = y + dy$; adeoque denuo differentiale crescentis y positiuum, decrescentis x negatiuum est. Fig. 5.

CAPVT II.

De Differentialibus functionum, quae e quantitatibus variabilibus multiplicatione oriuntur.

27. PROBL. *Differentiare functionem e quantitatibus variabilibus multiplicatione productam.*

Resol. Capiatur differentiale singularum variabilium in data functione contentarum (24), et ducatur in factum omnium ceterarum tam constantium, quam variabilium; nascentur tot facta differentialia, quot fuerint quantitates variabiles: summa horum factorum erit differentiale quaesitum.

Demonst. Quaeuis eiusmodi functio repraesentari potest per $auxy$: iam cum a constanter perseuerante, u abit in $u+du$, x in $x+dx$, y in $y+dy$, factum $auxy$ abit in $a.(u+du).(x+dx).(y+dy)$ $= auxy + axydu + auydx + auxdy + axdudy + aydxdu + audxdy + adudxdy$: ergo differentiale functionis $auxy$ est $axydu + auydx + auxdy + aydxdu + axdudy + audxdy + adudxdy$; atqui $adudxdy$ respectu trium praecedentium terminorum, et hi tres respectu reliquorum euanescunt (7): ergo $d(auxy) = axydu + auydx + auxdy$ $= du : axy + dx . auy + dy . aux$.

28. *Coroll.* Si ergo in proposito facto duo factores fuerint, differentiale vnius duci debet in alterum, et viciffim: si tres, differentiale cuiusuis duci debet in factum reliquorum duorum: si quattuor, differentiale cuiusuis duci debet in factum reliquorum trium, et sic porro.

EXEMPLA.

I $d\ (tuxyz) = tuxydz + tuxzdy + tuyzdx + txyzdu + uxyzdu.$

II $d\ (axby) = abxdy + abydx.$

III $d\ (ax - by) = adx - bdy.$

IV $d\ (bxy - abx) = bxdy + bydx - abdx.$

Scholion. Si e factoribus variabilibus aliqui decrescant aliis crescentibus, differentialia decrescentium tanquam negatiua erunt habenda respectu differentialium crescentium, ac proinde mutari debent signa terminorum, quos differentialia decrescentium ingrediuntur. E. gr. Si quaereretur differentiale facti AP . PM $= xy$, cum AP abeunte in A$p = x + dx$, PM abeat in $pm = y - dy$, factum xy abit in $xy + ydx - xdy - dxdy$, seu neglecto vltimo termino (7) in $xy + ydx - xdy$; quare differentiale quaesitum esset $ydx - xdy$. Fig. 5.

Verum vt haec tironi clariora fiant, sit recta constans AB $= a$, variabilis BC $= y$, erit rectangulum ABCD $= ay$. Ponamus iam manente AB rectam BC capere incrementum momentaneum C$c = dy$, erit Bc = BC + C$c = y + dy$, et rectangulum AB . Bc = ABcG = ABCD + DCcG $= ay + ady$, vnde tollendo ABCD $= ay$, restabit DCcG $= ady$, scilicet differentiale rectanguli ay. Fig. 6.

Sint tam AB $= x$, quam BC $= y$ variabiles, erit rectangulum ABCD $= xy$. Ponamus iam BA abire in Ba, et BC in Bc, erit Ba = BA + A$a = x + dx$, Bc = BC + C$c = y + dy$, ac proinde rectangulum Ba . Bc = aBcF = ABCD + AaED + CcGD + EDGF $= xy + ydx + xdy + dxdy$: ergo (negligendo rectangulum EDGF $= dxdy$, quod ob basim et altitudinem infinite paruas est infinitesimum secundi ordinis) erit rectanguli xy differentiale $= ydx + xdy$. Si fuerint tres variabiles uxy, poterit poni $ux = t$, eritque $uxy = ty$: atqui ex dictis $d\ (ty) = tdy + ydt$, et $dt = d\ (ux) = udx + xdu$: igitur pro t et dt valores substituendo erit $d\ (uxy) = uxdy + uydx + xydu$. Si fuerint qua-

tuor variabiles $uxyz$, poterit poni $uxy = t$, eritque $uxyz = tz$; atqui $d(tz) = tdz + zdt$, et ex nunc dictis $dt = d(uxy) = uxdy + uydx + xydu$: ergo pro t et dt valores substituendo erit $d(uxyz) = uxydz + uxzdy + uyzdx + xyzdu$, et sic porro. Vnde adparet regulam in superioribus traditam (27) etiam inductione erui posse.

Denique si BC $= y$ abeunte in Bc = BC + Cc $= y + dy$, AB $= x$ abeat in αB = AB — Aα $= x - dx$, erit rectangulum ABCD $= xy$, et rectangulum αB . Bc = αBcg = ABCD + DCcG — A$\alpha$$d$D — D$dg$G $= xy + xdy - ydx - dxdy$, seu negligendo $- dxdy$, quod est infinitesimum secundi ordinis, erit $= xy + xdy - ydx$, et hinc differentiale rectanguli xy est $xdy - ydx$: hinc si variabili vna crescente altera decrescat, patet differentiale decrescentis negatiue sumi oportere.

CAPVT III.

De Differentialibus fractionum, seu functionum, quae e quantitatibus variabilibus diuisione oriuntur.

29. *PROBL. Datam fractionem differentiare.*

Resol. Differentiale denominatoris ductum in numeratorem subtrahatur a differentiali numeratoris ducto in denominatorem, ac residuum diuidatur per quadratum denominatoris: quotus hinc enascens erit differentiale quaesitum.

Demonst. Quaeuis eiusmodi fractio repraesentari potest per $\frac{ax}{by}$; ponatur ergo x abire in $x + dx$, et y in $y + dy$, abibit proposita fractio in $\frac{ax + adx}{by + bdy}$, eritque $d\left(\frac{ax}{by}\right) = \left(\frac{ax + adx}{by + bdy}\right) - \frac{ax}{by}$ (22), seu reducendo fractiones ad communem denominatorem

erit $d\left(\frac{ax}{by}\right) = \frac{abxy + abydx - abxy - abxdy}{b^2y^2 + b^2ydy} = \frac{abydx - abxdy}{b^2y^2 + b^2ydy}$; atqui b^2ydy respectu b^2y^2 euanescit: ergo $d\left(\frac{ax}{by}\right) = \frac{abydx - abxdy}{b^2y^2}$.

30. *Coroll.* Si ergo numerator fractionis constans fuerit, cuius nullum est differentiale (11), erit fractionis differentiale idem cum differentiali denominatoris ducto in numeratorem, at mutato signo, et diuiso per quadratum denominatoris. E. g. $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{0 . x - adx}{x^2} = \frac{-adx}{x^2}$. Sin autem denominator fuerit constans, fractionis differentiale idem erit cum differentiali numeratoris retento signo, ac per denominatorem diuiso. E. g. $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - x . 0}{a^2} = \frac{adx}{a^2} = \frac{dx}{a}$.

Exempla.

I $d\left(\frac{xy}{tu}\right) = \frac{tuxdy + tuydx - xytdu - xyudt}{t^2u^2}$.

II $d\left(\frac{xy + tu}{tx}\right) = \frac{x^2tdy + xt^2du - x^2ydt - t^2udx}{t^2x^2}$.

III $d\left(\frac{a}{xy + ty}\right) = \frac{-axdy - aydx - aydt - atdy}{x^2y^2 + 2xy^2t + t^2y^2}$.

IV $d\left(\frac{ax}{uy - ux}\right) = \frac{auydx - auxdy - axydu + ax^2du}{u^2y^2 - 2u^2xy + u^2x^2}$.

Scholion. Poterat regula superior etiam hac methodo erui. Ponatur $\frac{ax}{by} = u$, erit $ax = buy$, adeoque $adx = budy + bydu$, et hinc $du = d\left(\frac{ax}{by}\right) = \frac{adx - budy}{by}$, ac pro u reponendo $\frac{ax}{by}$ erit $d\left(\frac{ax}{by}\right) = \frac{adx}{by} - \frac{abxdy}{b^2y^2} = \frac{abydx - abxdy}{b^2y^2}$ prorsus vt supra. Similiter fiat in exemplo primo $\frac{xy}{tu} = \frac{r}{s}$, ita vt xy sit $= r$, $tu = s$,

erit $d\left(\frac{xy}{tu}\right) = d\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{sdr - rds}{s^2}$: cum igitur ſit $r = xy$, $dr = xdy + ydx$, $s = tu$, $ds = tdu + udt$, valoribus hiſce ſubſtitutis erit $d\left(\frac{xy}{tu}\right) = d\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{sdr - rds}{s^2} = \frac{tuxdy + tuydx - xyudt - xytdu}{t^2u^2}$ vt ſupra. Eodem pacto licebit progredi, ſi fractiones magis compoſitae occurrant.

CAPVT IV.

De Differentialibus potentiarum perfectarum, et imperfectarum, ſeu functionum radicalium.

31. *PROBL. Datam potentiam perfectam differentiare.*

Reſol. Per exponentem datae potentiae multiplicetur ipſa potentia vno gradu depreſſa, et factum hoc ducatur in differentialia quantitatum variabilium, quae in data potentia inueniuntur; productum hinc enaſcens erit differentiale quaeſitum.

Demonſt. Quaelibet eiusmodi potentia data repraeſentari poteſt per ax^m: iam dum x abit in $x+dx$, ax^m abit in $a(x+dx)^m$; atqui $a(x+dx)^m$ eſt $= a\left(x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}dx^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^{m-3}dx^3 \text{ etc.}\right)$ (Elem. 110): ergo $d(ax^m) = a\left(mx^{m-1}dx + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}dx^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^{m-3}dx^3 \text{etc.}\right)$; atqui in hac ſerie omnes termini reliqui euaneſcunt reſpectu primi (7): ergo $d(ax^m) = amx^{m-1}dx$.

32. *Coroll.* Poterat eadem regula etiam inductione erui. Nam ax^2 eſt $= ax.x$; atqui $d(ax.x)$ eſt $= axdx + axdx$ (27) $= 2axdx$: ergo etiam $d(ax^2) = 2axdx$. Similiter $ax^3 = ax.x.x$; atqui $d(ax.x.x)$ eſt $= ax^2dx + ax^2dx + ax^2dx$ (cit.) $= 3ax^2dx$: ergo

etiam $d\ (ax^3) = 3ax^2dx$. Eodem modo $ax^4 = ax\,.\,x\,.\,x\,.\,x$; atqui $d\,(ax\,.\,x\,.\,x\,.\,x) = ax^3dx + ax^3dx + ax^3dx + ax^3dx$ (cit.) $= 4ax^3dx$: ergo etiam $d\ (ax^4) = 4ax^3dx$, et ſic porro. Vnde generatim $d\ (ax^m) = amx^{m-1}dx$.

Exempla.

I $d\ (x^3y^3) = 3x^{3-1}y^{3-1}.(xdy+ydx) = 3x^2y^3dx + 3y^2x^3dy$.

II $d\ \left(\frac{y^2}{x^m}\right) = d\ (y^2x^{-m})$ (Elem. 103) $= 2yx^{-m}dy - my^2x^{-m-1}dx$

$$= \frac{2x^mydy - my^2x^{m-1}dx}{x^{2m}}.$$

III $d\,(\overline{x+ax}^2) = 2\,(x+ax)^{2-1}.(dx+adx) = (2x+2ax).(dx+adx)$
$= 2xdx + 4axdx + 2a^2xdx$.

IV $d\ (ax^my^n) = max^{m-1}y^ndx + nax^my^{n-1}dy$.

V $d\,(\overline{xy+uy}^3) = 3\ (xy+uy)^2.\,(xdy + ydx + udy + ydu)$
$= (3x^2y^2 + 6uxy^2 + 3u^2y^2).\,(xdy + ydx + udy + ydu)$.

Scholion. Cum potentia habens pro exponente quantitatem integram negatiuam aequetur ſuo coefficienti diuiſo per eandem potentiam, ſed exponentis poſitiui (Elem. 103), differentiale id genus potentiae inuenitur etiam per fractionum regulam capite ſuperiore traditam: et viciſſim differentiale fractionis pro denominatore potentiam aliquam quantitatis variabilis habentis inuenitur per ſuperiorem potentiarum regulam. E. g. $d\,(ax^{-m}) = d\left(\frac{a}{x^m}\right) = -\frac{max^{m-1}dx}{x^{2m}}$, ſeu reapſe per x^{2m} diuidendo $= -max^{-m-1}dx$. Similiter $d\left(\frac{ax}{by^m}\right) = d\,(ab^{-1}xy^{-m}) = ab^{-1}y^{-m}dx - mab^{-1}xy^{-m-1}dy = \frac{aby^mdx - mabxy^{m-1}dy}{b^2y^{2m}}$. Ceterum differentiale potentiarum e radicibus polynomiis oriundarum etiam ſequenti methodo inuenitur.

Quaeratur differentiale potentiae $(x+ax)^2$; fiat $x+ax=y$, erit $(x+ax)^2=y^2$, et hinc $d(\overline{x+ax}^2)=d(y^2)=2ydy$; atqui ex hypothesi $y=x+ax$, adeoque $dy=dx+adx$: ergo valoribus hisce substitutis erit $d(\overline{x+ax}^2)=2ydy=2xdx+4axdx+2a^2xdx$ prorsus vt supra in Exemplo tertio.

33. *PROBL. Datam potentiam imperfectam, seu functionem radicalem differentiare.*

Resol. Quantitates radicales sublatis signis radicalibus exhibeantur instar potentiarum fractos exponentes habentium (Elem. 102); deinde quaeratur earum differentiale prorsus eadem methodo, qua paulo ante in potentiis vsi fuimus.

Demonst. Quaeuis eiusmodi functio repraesentari potest per $\sqrt[n]{x^t}=x^{\frac{t}{n}}$: fiat ergo $\frac{t}{n}=m$, erit $x^{\frac{t}{n}}=x^m$, cuius differentiale per problema praecedens est $=mx^{m-1}dx$: quare loco m reponendo $\frac{t}{n}$, erit $mx^{m-1}dx=\frac{t}{n}x^{\frac{t}{n}-1}dx=\frac{t}{nx}x^{\frac{t}{n}}dx=\frac{t}{nx}dx\sqrt[n]{x^t}$.

34. *Coroll.* Si functio proposita habuerit pro exponente fractionem negatiuam, poterit reduci ad fractionem, cuius numerator sit coefficiens ipsius functionis radicalis, ac denominator sit ipsa illa functio cum exponente positiuo (Elem. 106). E. gr. $ab\sqrt[3]{(ax+x^2)^{-2}}=ab(ax+x^2)^{-\frac{2}{3}}$ aequiualet fractioni $\frac{ab}{(ax+x^2)^{\frac{2}{3}}}$ $=\frac{ab}{\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}}$: quare poterunt huiusmodi functiones more fractionum differentiari. Similiter si differentianda sit fractio habens denominatorem radicalem, poterit denominator, adeoque fractio ipsa tolli multiplicando numeratorem per denominatorem

torem mutato ſigno exponentis. E. g. $\frac{a^3b}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{a^3b}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ $= a^3b\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (cit.): item $\frac{ab^2}{\sqrt[3]{(ax+x^2)^{-2}}} = \frac{ab^2}{(ax+x^2)^{-\frac{2}{3}}} =$ $= ab^2\,(ax+x^2)^{\frac{2}{3}}$: quare poterunt huiusmodi fractiones more integrorum per problema praeſens differentiari.

Exempla.

I $d\,(a\sqrt[3]{\overline{xy+uy}}^{\,2}) = d\,(a.\overline{xy+uy}^{\,\frac{2}{3}})$

$$= \frac{2a}{3}.(xy+uy)^{\frac{2}{3}-1}.(xdy+ydx+udy+ydu)$$
$$= \frac{2a}{3}(xy+uy)^{-\frac{1}{3}}.(xdy+ydx+udy+ydu)$$
$$= \frac{2a}{3\sqrt[3]{(xy+uy)}}.(xdy+ydx+udy+ydu)$$
$$= \frac{2axdy+2aydx+2audy+2aydu}{3\sqrt[3]{(xy+uy)}}.$$

II $d\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(xy+uy)}}\right) = d\,(\overline{xy+uy}^{\,-\frac{1}{3}})$

$$= -\frac{1}{3}(xy+uy)^{-\frac{1}{3}-1}.(xdy+ydx+udy+ydu)$$
$$= -\frac{1}{3}(xy+uy)^{-\frac{4}{3}}.(xdy+ydx+udy+ydu)$$
$$= \frac{-1}{3\,(xy+uy)^{\frac{4}{3}}}.(xdy+ydx+udy+ydu)$$
$$= \frac{-xdy-ydx-udy-ydu}{3\sqrt[3]{(xy+uy)^4}}.$$

$$\text{III}\quad d\left(\sqrt[m]{\overline{x^n+x^ry^t}^{\,n}}\right) = d\left(\overline{x^n+x^ry^t}^{\frac{n}{m}}\right)$$

$$= \frac{n}{m}(x^n+x^ry^t)^{\frac{n}{m}-1}.\,d(x^n+x^ry^t)$$

$$= \frac{n}{m}(x^n+x^ry^t)^{\frac{n}{m}-1}.(nx^{n-1}dx+tx^ry^{t-1}dy+ry^tx^{r-1}dx)$$

$$= \frac{n(x^n+x^ry^t)^{\frac{n}{m}}}{m(x^n+x^ry^t)}.(nx^{n-1}dx+tx^ry^{t-1}dy+ry^tx^{r-1}dx)$$

$$= \frac{(x^n+x^ry^t)^{\frac{n}{m}}}{m(x^n+x^ry^t)}.(n^2x^{n-1}dx+ntx^ry^{t-1}dy+nry^tx^{r-1}dx)$$

$$= \frac{(n^2x^{n-1}dx+ntx^ry^{t-1}dy+nry^tx^{r-1}dy)\sqrt[m]{(x^n+x^ry^t)^n}}{m(x^n+x^ry^t)}.$$

$$\text{IV}\quad d\left(\sqrt[n]{\overline{x+ay}^{\,m}}.\sqrt[r]{\overline{x+cx^2}^{\,t}}\right) = d\sqrt[n]{\overline{x+ay}^{\,m}}.\sqrt[r]{(x+cx^2)^t}+d\left(\sqrt[r]{\overline{x+cx^2}^{\,t}}.\sqrt[n]{(x+ay)^m}\right.;$$

atqui $d\left(\sqrt[n]{\overline{x+ay}^{\,m}}\right) = \frac{m}{n}(dx+ady).\sqrt[n]{(x+ay)^{m-n}}$

et $d\left(\sqrt[r]{\overline{x+cx^2}^{\,t}}\right) = \frac{t}{r}(dx+2cxdx).\sqrt[r]{(x+cx^2)^{t-r}} = \frac{tdx}{r}(1+2cx).\sqrt[r]{(x+cx^2)^{t-r}}$

ergo his substitutis erit differentiale quaesitum

$$= \frac{m}{n}(dx+ady)\sqrt[n]{(x+ay)^{m-n}}.\sqrt[r]{(x+cx^2)^t}+\frac{tdx}{r}(1+2cx)\sqrt[r]{(x+cx^2)^{t-r}}.\sqrt[n]{(x+ay)^m}.$$

$$\text{V}\quad d\left(\sqrt{ax+\sqrt{x^2+uy}}\right) = d\left(\overline{ax+\overline{x^2+uy}^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{ax+\overline{x^2+uy}^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}-1}.\left(adx+\frac{1}{2}\left((x^2+uy)^{\frac{1}{2}-1}.(2xdx+udy+ydu)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{ax+\overline{x^2+uy}^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(adx+\frac{1}{2}\left((x^2+uy)^{-\frac{1}{2}}.(2xdx+udy+ydu)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(ax+\sqrt{(x^2+uy)})}} \cdot \left(adx + \left(\frac{1}{2\sqrt{(x^2+uy)}} \cdot 2xdx + udy + ydu\right)\right)$$

$$= \frac{adx}{2\sqrt{(ax+\sqrt{(x^2+uy)})}} + \frac{2xdx + udy + ydu}{2\sqrt{(ax+\sqrt{(x^2+uy)})} \cdot 2\sqrt{(x^2+uy)}}.$$

$$\text{VI } d\left(\sqrt{ax+x^2+\sqrt[4]{(a^4-x^4)}}\right) = d\left(ax+x^2+\overline{a^4-x^4}^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(ax+x^2+\overline{a^4-x^4}^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}-1} . \left(adx+2xdx+\tfrac{1}{4}\left((a^4-x^4)^{\frac{1}{4}-1} . -4x^3dx\right)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(ax+x^2+\overline{a^4-x^4}^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} . \left(adx+2xdx+\tfrac{1}{4}\left((a^4-x^4)^{-\frac{3}{4}} . -4x^3dx\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(ax+x^2+\sqrt[4]{(a^4-x^4)})}} . \left(adx+2xdx+\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{(a^4-x^4)^3}} . -4x^3dx\right)\right)$$

$$= \frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{(ax+x^2+\sqrt[4]{(a^4-x^4)})}} - \frac{x^3dx}{2\sqrt{(ax+x^2+\sqrt[4]{(a^4-x^4)})} . \sqrt[4]{(a^4-x^4)^3}}.$$

Scholion. Attenta contemplatio differentialium e functionibus radicalibus erutorum suggerit sequentem regulam compendiariam. Quaeratur differentiale formulae generalis $\sqrt[n]{x^t}$: fiat fractio, cuius numerator sit exponens quantitatis sub signo radicali positae t, denominator sit factum ex radicis exponente n in quantitatem x sub signo radicali positam: deinde multiplicetur haec fractio per differentiale dx quantitatis sub signo radicali positae x; denique hoc factum ducatur in datam functionem radicalem $\sqrt[n]{x^t}$: erit enim $d(\sqrt[n]{x^t}) = \frac{t}{nx} dx \sqrt[n]{x^t}$ vt supra. Similiter $d\sqrt[3]{\overline{(xy+uy)}^2}$

$$= \frac{2}{3(xy+uy)} \cdot (xdy + ydx + udy + ydu) . \sqrt[3]{(xy+uy)^2}$$

$= \frac{2xdy + 2ydx + 2udy + 2ydu}{3\sqrt[3]{(xy+uy)}}$. Item $d\sqrt[3]{(a+bx)} = \frac{1}{3(a+bx)} . bdx . \sqrt[3]{(a+bx)} = \frac{bdx}{3\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$, et ſic deinceps.

SECTIO SECUNDA.

De multiplici Calculi Differentialis vſu.

CAPVT I.

De vſu Calculi Differentialis in determinandis curuarum Subtangentibus.

35. Dum e data ad curuam quampiam aequatione inueſtigatur eiusdem ſubtangens, tangens, aut recta quaecunque alia per tangentem determinata, ea inueſtigatio *methodus tangentium directa* adpellatur. Nos rectarum harum definitiones alibi tradidimus (Elem. 642, 653) : nunc earundem inueſtigationem ope calculi differentialis tribus capitibus perſequemur.

Fig. 7. 36. PROBL. *Inuenire formulam generalem pro ſubtangente PT in curua quacunque algebraica AB:*

Reſol. Sit abſciſſa AP $= x$, ordinata PM $= y$, cui ducatur alia *pm* infinite propinqua, et recta MR axi AQ parallela, erit Pp $=$ MR $= dx$, *m*R $= dy$: et quia lineola *m*O eſt infiniteſima reſpectu *m*R, recta *m*R pro OR, et arcus infiniteſimus M*m* pro tangentis portione MO haberi poteſt: habebuntur adeo duo triangula MR*m*, TPM ſimilia; vnde *m*R : MR $=$ PM : PT, ſeu $dy : dx = y :$ PT : quare PT $= \frac{ydx}{dy}$. Eadem obtinetur formula, ſi conuexitas curuae referatur ad axem, vti in Fig. 11.

37. *Coroll. 1.* Si crefcente abfciffa CP ordinata PM decrefcat, erit dy quantitas negatiua (26), et tunc $PT = \frac{-ydx}{dy}$, feu fubtangens cadit in partem origini abfciffarum C oppofitam. *Fig. 11.*

38. *Coroll. 2.* Quodfi iam detur aequatio ad curuam quampiam, cuius fubtangens quaeritur, primum aequatio per regulas fuperiore fectione traditas differentietur; deinde valor quantitatis dx vel dy eruatur, ac in formula generali fubtangentis inuenta fubftituatur; ita obtinebitur fubtangens quaefita in terminis cognitis nullum differentiale inuoluentibus, ficuti exempla paulo poft declarabunt.

39. *Coroll. 3.* Cum fit $AT = PT - AP = \frac{ydx}{dy} - x$, *Fig. 7.* erit reducendo ad communem denominatorem $AT = \frac{ydx - xdy}{dy}$: quare data fubtangente PT datur etiam AT.

40. *Coroll. 4.* Si e vertice curuae A erigatur recta AE ordinatae PM parallela occurrens tangenti TM in puncto E, fimilia erunt triangula MRm, TPM, TAE: vnde $MR : mR = AT : AE$, feu $dx : dy = \frac{ydx - xdy}{dy} : AE$; vnde $AE = \frac{ydx - xdy}{dx}$. Data igitur fubtangente PT datur etiam AE.

Scholion. Quae in refolutione praefentis problematis de triangulo MRm diximus, eadem in fequentibus deinceps fupponemus, neque repetemus amplius.

41. *PROBL. Inuenire fubtangentem PT in parabola.*

Refol. Sit abfciffa $AP = x$, ordinata $PM = y$, parameter $= p$, erit $y^2 = px$ (Elem. 624.), ac proinde differentiando erit $2ydy = pdx$, et hinc $\frac{2ydy}{p} = dx$, quo valore in formula generali fubtangentis $\frac{ydx}{dy}$ fubftituto erit $PT = \frac{2y^2}{p}$, ac pro y^2 po-

nendo px erit $PT = \frac{2px}{p} = 2x = 2AP$, id eſt, ſubtangens in parabola aequatur duplae abſciſſae. Conf. Elem. 657.

42. *Coroll. 1.* Idem obtinetur ſubtangentis valor, ſi in generali formula non dx, ſed dy e parabolae aequatione erutum ſubſtituatur. Eſt enim, vt vidimus, $2ydy = pdx$, adeoque $dy = \frac{pdx}{2y}$, quo valore in generali formula $\frac{ydx}{dy}$ ſubſtituto erit $PT = \frac{2y^2dx}{pdx} = \frac{2y^2}{p}$, ac pro y^2 ponendo px erit $PT = \frac{2px}{p} = 2x$; quod quidem ſemel hic adnotaſſe ſufficiat.

43. *Coroll. 2.* Si ad datum parabolae punctum M duci tangens debeat, ducta ad punctum M ordinata PM, fiat $AT = AP = x$, erit $PT = 2x$, adeoque erit PT ſubtangens, et recta TM per puncta T et M ducta erit tangens.

Scholion. Eximenda hoc loco venit familiaris quaedam tironi dubitatio. In differentiali quantitatis y^2, quod reapſe eſt $= 2ydy + dy^2$, neglecta fuit infiniteſima ſecundi ordinis dy^2, qua minime neglecta vtique paulo diuerſus eruetur ſubtangentis valor, quem tamen praeciſe eſſe $= 2x$ ſyntheſis euidenter demonſtrat: videtur adeo analyſis infinitorum ſyntheſi, hoc eſt, rigidae demonſtrandi methodo aduerſari. Vt ſcrupuli huiusmodi euellantur ex animis, probe aduertendum eſt, nos in quaerendo ſubtangentis valore parabolam conſideraſſe tanquam polygonum, ſeu poſuiſſe tangentis portionem MO cum arcu Mm congruere, ac proinde Mm eſſe hypotenuſam trianguli rectanguli MRm: at poſteaquam ponimus rectam TM eſſe vere tangentem, triangulum illud diminuimus vltra quosuis limites ita, vt portio tangentis MO, aut arcus Mm euadat denique vnicum punctum contactus, quo in caſu R$m = dy$, ac proinde etiam dy^2 fit abſolute $= 0$, et analyſis perfecte conſentit cum ſyntheſi.

44. *PROBL.* *Inuenire ſubtangentem PT in circulo.* *Fig.* 8.

Reſol. Sit diameter circuli AB $= a$; abſciſſa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura circuli AP : PM = PM : PB (Elem. 420), ſeu $x : y = y : a - x$, et hinc $y^2 = ax - x^2$, ac proinde differentiando erit $2ydy = adx - 2xdx$; vnde $dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$: quo valore in formula generali ſubtangentis $\frac{ydx}{dy}$ ſubſtituto erit PT $= \frac{2y^2}{a - 2x}$, ac pro y^2 ponendo $ax - x^2$ erit PT $= \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$: hinc autem ſequens proportio naſcitur, $\frac{1}{2}a - x : x = a - x$: PT (Elem. 204), ſeu PQ : AP = PB : PT.

45. *Coroll. 1.* Cumque ſit AT = PT — AP $= \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x} - x$, erit reducendo ad communem denominatorem AT $= \frac{ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a - x}$: vnde naſcitur haec proportio $\frac{1}{2}a - x : x = \frac{1}{2}a$: AT, ſeu PQ : AP = AQ : AT, et conuertendo PQ : PQ + AP = AQ : AQ + AT, id eſt PQ : QA = QA : QT.

46. *Coroll. 2.* Si ergo ad PQ, AP, PB quaeratur quarta proportionalis PT; vel ad PQ, QA tertia QT, determinabitur in diametro producta punctum T, e quo ad datum punctum M ducenda eſt tangens TM.

47. *Coroll. 3.* Si poneretur AP = AQ $= \frac{1}{2}a$, foret PT $= \frac{2y^2}{a - 2x}$ (44) $= \frac{2y^2}{0} = \infty$ (8); ac proinde tangens TM euaderet diametro AB parallela.

48. *Coroll. 4.* Si abſciſſa Q$p = x$ a centro circuli Q computetur, et radius AQ ponatur $= a$, erit A$p = a + x$, pB $= a - x$, et hinc $pm^2 = Ap \,.\, p\text{B} = a^2 - x^2 = y^2$ (Elem. 420); adeoque differentiando erit $-2xdx = 2ydy$, et $dx =$

$= \frac{2ydy}{2x}$, quo valore in formula generali ſubtangentis $\frac{ydx}{dy}$ ſubſtituto erit $pt = \frac{-y^2}{x}$, id eſt, erit ſubtangens pt tertia proportionalis ad abſciſſam $Qp = x$, et ordinatam $pm = y$; ſed ob valorem negatiuum cadet in partem oppoſitam origini abſciſſarum Q.

49. *PROBL. Inuenire ſubtangentem PT in ellipſi.*

Reſol. Sit axis transuerſus ellipſeos $AB = a$, parameter eiusdem $= p$, abſciſſa $AP = x$, ordinata $PM = y$: erit ex natura ellipſeos $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (Elem. 630), ſeu $ay^2 = apx - px^2$, et hinc differentiando erit $2aydy = apdx - 2pxdx$, adeoque $dx = \frac{2aydy}{ap - 2px}$; quo valore in formula generali ſubtangentis $\frac{ydx}{dy}$ ſubſtituto erit PT $= \frac{2ay^2}{ap - 2px}$, et pro ay^2 ponendo $apx - px^2$ erit $PT = \frac{2apx - 2px^2}{ap - 2px}$ $= \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$.

50. *Coroll. 1.* Cum valor ſubtangentis idem plane ſit in ellipſi, qui in circulo (44), patet corollaria ſuperiora (45, 46) etiam in ellipſi locum habere.

51. *Coroll. 2.* Si AP euadat $= AQ$, ſeu $x = \frac{1}{2}a$, erit $PT = \frac{2ay^2}{ap - 2px}$ (49) $= \frac{2ay^2}{0} = \infty$: quare, tangens TM euadet axi AB parallela.

Fig. 10. 52. *PROBL. Inuenire ſubtangentem PT in hyperbola ad axem AB relata.*

Reſol. Sit axis transuerſus $AB = a$, parameter eiusdem $= p$, abſciſſa $AP = x$, ordinata $PM = y$, erit ex natura hyperbolae $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (Elem. 630), ſeu $ay^2 = apx + px^2$;

quare

quare differentiando erit $2aydy = apdx + 2pxdx$, et hinc $dx = \frac{2aydy}{ap+2px}$; quo valore in formula generali subtangentis $\frac{ydx}{dy}$ substituto erit $PT = \frac{2ay^2}{ap+2px}$, et pro ay^2, ponendo $apx + px^2$ erit $PT = \frac{2apx+2px^2}{ap+2px} = \frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x}$: vnde nascitur haec proportio $\frac{1}{2}a + x : x = a + x : PT$, seu $PC : AP = PB : PT$.

53. *Coroll. 1.* Cumque sit $AT = PT - AP = \frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x} - x$, erit reducendo ad communem denominatorem $AT = \frac{ax+x^2-\frac{1}{2}ax-x^2}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}$: quare $\frac{1}{2}a+x : x = \frac{1}{2}a : AT$, seu $CP : AP = CA : AT$, et conuertendo $CP : CP - AP = CA : CA - AT$, hoc est $CP : CA = CA : CT$.

54. *Coroll. 2.* Si ergo ad PC, AP, PB quaeratur quarta proportionalis PT; vel ad duas CP et CA tertia CT, determinabitur in axe hyperbolae AB punctum T, e quo ad datum in hyperbola punctum M ducenda est tangens TM.

55. *PROBL. Inuenire subtangentem PT in hyperbola ad asymptotum CT relata.* *Fig. 11.*

Resol. Sit recta AE e vertice hyperbolae A ducta, et asymptoto CQ parallela, quam hyperbolae *potentiam* vocant, $= a$, abscissa $CP = x$, ordinata $PM = y$, erit ex natura hyperbolae ad asymptotum relatae $xy = a^2$, ac differentiando $xdy + ydx = 0$ (11), adeoque $ydx = - xdy$; quo valore in formula generali subtangentis $\frac{ydx}{dy}$ substituto erit $PT = \frac{-xdy}{dy} = -x = - CP$.

56. *Coroll.* Si ergo, ob valorem subtangentis negatiuum, fiat ex parte opposita origini abscissarum $PT = CP = x$, erit

punctum T illud, per quod ducenda est tangens TM ad datum in hyperbola punctum M.

Scholion. Duo hoc loco diligenter notabit tiro. 1) Cum crescente abscissa CP decrescat ordinata PM, differentiale functionis xy debebat esse non $xdy + ydx$, sed $ydx - xdy$; sed quia eadem de caussa etiam formula generalis pro hyperbola ad asymptotum relata est non $\frac{ydx}{dy}$, sed $-\frac{ydx}{dy}$, idcirco nos dy neutro in loco sumsimus negatiue: eodem enim res redit, ac si vtroque in loco negatiue sumtum fuisset, cum idem sit, siue in formula $\frac{ydx}{dy}$ pro ydx substituas $-xdy$, vti nos fecimus; siue ex $d(xy) = ydx - xdy = 0$ elicias $ydx = xdy$, et in formula generali $-\frac{ydx}{dy}$ pro $-ydx$ ponas $-xdy$: nam vtroque in casu idem eruitur valor subtangentis $-x$. 2) Quoniam functio $xy = a^2$ constans est, nullum reapse habet differentiale, nos tamen pro differentiali sumsimus $xdy - ydx$. Nimirum quia factores x et y variabiles sunt, et crescente x decrescit y, dum x abit in $x + dx$, y abit in $y - dy$, et factum xy in $xy + ydx - xdy$ (neglecto scilicet infinitesimo secundi ordinis $- dxdy$); quare functio xy habet equidem differentiale $ydx - xdy$, sed eiusmodi, quod sit $= d(a^2) = 0$: quantum enim accrescit ob ydx, tantum decrescit ob $- xdy$, ita vt sit $xy + ydx - xdy = xy$. Atque hoc sensu verum est $d(xy) = 0$, seu eiusmodi esse differentiale functionis xy, vt sit aequale nihilo terminis eiusdem sese destruentibus.

Fig. 12. 57. *PROBL. Inuenire subtangentem PT in cycloide.*

Resol. E dato cycloidis puncto M ducatur ordinata MP, et huic alia infinite propinqua mp, producanturque ambae, donec occurrant diametro circuli genitoris AB in punctis Q et q: ad

punctum P, vbi ordinata MP secat peripheriam circuli genitoris, ducatur tangens KP (Elem. 351.), quam ob maiorem distantiam puncti M ab axe AB, quam puncti P, necessario secabit alicubi in T tangens cycloidis NM ducta ad datum punctum M. Sit iam arcus $AP = x$, ordinata $PM = y$, poterunt arcus infinitesimi Pp et Mm haberi pro portionibus rectilineis tangentium KP et NM: quare ducta recta MR tangenti KP parallela, similia erunt triangula MRm, TPM; adeoque $mR : MR = PM : PT$, seu $dy : dx = y : PT$; vnde $PT = \frac{ydx}{dy}$: atqui e natura cycloidis, quam nos in Physica explicauimus, x est $= y$, et hinc $dx = dy$: ergo $PT = y = MP$.

58. *Coroll. 1.* Si ergo in tangente circuli genitoris KP capiatur $PT = MP$, habebitur punctum T, e quo ad datum in cycloide punctum M ducenda est tangens TM.

59. *Coroll. 2.* Quoniam per demonstrata $PT = MP$, in triangulo TPM isosceli aequales sunt anguli MTP et TMP, adeoque angulus externus TPQ est $= 2TMP$: atqui ducta chorda AP angulus TPA erit $= APQ$, cum prioris mensura sit dimidium arcus AP (Elem. 340), et mensura posterioris sit dimidium arcus priori AP aequalis (Elem. 342): ergo angulus $TPQ = 2APQ$, et hinc $APQ = TMP$, adeoque tangens cycloidis TM chordae AP parallela est (Elem. 313.).

60. PROBL. *In eadem cycloide inuenire aliam subtangentem QN.*

Resol. Ductis iisdem rectis, quas in resolutione praecedentis problematis duximus, fiant praeterea rectae MS et PO parallelae diametro circuli genitoris AB, sitque abscissa $AQ = x$, ordinata $PQ = y$, $QM = u$, arcus $AP = t$, erit $MS = PO = Qq = dx$, $RS = pO = dy$, $mS = du$, $mR = mS - RS =$

$du - dy$. Iam ob triangula MSm, NQM similia erit mS : MS $=$ QM : QN, seu $du : dx = u$: QN; vnde QN $= \frac{udx}{du}$.

Porro e cycloidis natura arcus AP aequatur ordinatae MP; quare etiam differentialia eorundem Pp et mR inter se aequalia sunt, hoc est $dt = du - dy$, et hinc $dt + dy = du$. Quaerendi iam sunt valores differentialium dt et dy, ac in postrema hac aequatione substituendi. Est vero $dt =$ Pp $= \sqrt{(PO^2 + pO^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: ac ex natura circuli $y = \sqrt{(ax - x^2)}$, et hinc $dy = \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$, ac $dy^2 = \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2}$; quare si hic valor pro dy^2 substituatur in aequatione $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, erit $dt = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4axdx^2 - 4x^2dx^2 + a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2}\right)}$ $= \sqrt{\left(\frac{a^2dx^2}{4ax - 4x^2}\right)} = \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$.

Si iam inuenti valores quantitatum dt et dy substituantur in superiore aequatione $dt + dy = du$, erit $du = \frac{2adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$; quo valore in expressione subtangentis inuenta $\frac{udx}{du}$ substituto erit QN $= \frac{u\sqrt{(ax - x^2)}dx}{adx - xdx} = \frac{u\sqrt{(ax - x^2)}}{a - x}$: ac demum pro $\sqrt{(ax - x^2)}$ ponendo y, erit QN $= \frac{uy}{a - x}$, vnde enascitur haec proportio $a - x : y = u$: QN; atqui ex natura circuli $a - x : y = y : x$ (Elem. 420.): ergo $y : x = u$: QN, seu QP : AQ $=$ QM : QN.

61. *Coroll. 1.* Si ergo ad QP, AQ, et QM quaeratur quarta proportionalis QN, determinabitur in diametro circuli genitoris AB producta punctum N, e quo duci debet tangens NM ad datum in cycloide punctum M.

62. *Coroll. 2.* Quoniam QP : AQ = QM : QN, denuo adparet tangentem cycloidis NM parallelam esse chordae AP (Elem. 407).

63. PROBL. *Inuenire subtangentem PT in logarithmica.* Fig. 13.

Resol. Sit abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit PT $= \frac{-ydx}{dy}$ (37). Ducatur quaecunque ordinata NS $= u$, sitque abscissa eidem respondens AN $= t$, erit subtangens puncto S respondens $= -\frac{udt}{du}$ (cit.). Quia vero ex natura huius curuae, quemadmodum libro secundo demonstrabimus, abscissis in proportione arithmetica progredientibus respondent ordinatae in proportione geometrica, erit $Pp = Nn$, seu $dx = dt$, et PM : pm = NS : ns, id est $y : y + dy = u : u + du$, et conuertendo $y : y + dy - y = u : u + du - u$, siue $y : dy = u : du$, adeoque $ydu = udy$: et $\frac{y}{dy} = \frac{u}{du}$, ac aequalia multiplicando per aequalia $-dx = -dt$, erit $\frac{-ydx}{dy} = \frac{-udt}{du}$, hoc est, subtangentes inter se aequales sunt.

64. *Coroll.* Cumque eadem subtangentium aequalitas obtineatur, vbicunque sumantur in logarithmica puncta M et S, patet subtangentem in hac curua constantem esse, at ob valorem negatiuum accipi debere ex parte opposita origini abscissarum A respectu puncti P.

CAPVT II.

De vsu Calculi Differentialis in determinandis curuarum Tangentibus, Subnormalibus, et Normalibus.

65. PROBL. *Inuenire formulam generalem tangentis TM in curua quacunque algebraica.* Fig. 7.

Resol. Cum arcus infinitesimus Mm pro tangentis TM portione haberi possit, in triangulo rectangulo MRm erit $Mm^2 = MR^2 + mR^2 = dx^2 + dy^2$, adeoque $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Porro ob triangula MR$m$, TPM similia erit R$m$: Mm = PM : TM, seu $dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = y$: TM; vnde TM = $\frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

66. *Coroll. 1.* Si ergo e data ad curuam, cuius tangens quaeritur, aequatione eliciatur valor quantitatis dx^2, et in formula hac generali substituatur, euanescent quantitates differentiales, ac valor tangentis obtinebitur in terminis finitis, sicuti exemplis declarabitur.

67. *Coroll. 2.* Si punctum contactus M fuerit in vertice curuae A, erit illic $x = 0$, ac proinde etiam $dx = 0$; vnde et subtangens PT $= \frac{ydx}{dy} = 0$: igitur tangens TM euadet axi AQ perpendicularis. Idem hoc quoque pacto euincitur: cum sit $dy : dx$ = PM : PT, seu sicut sinus anguli PTM ad sinum complementi eiusdem, cumque in vertice dx sit $= 0$, etiam sinus complementi anguli PTM erit illic $= 0$, ac proinde angulus T fiet rectus, seu tangens axi perpendicularis.

68. PROBL. *Inuenire tangentem TM in parabola.*

Resol. Cum sit in parabola $y^2 = px$ (Elem. 624.), erit differentiando $2ydy = pdx$, et hinc $dx = \frac{2ydy}{p}$, ac $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$. Eleuetur formula generalis tangentis $\frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ad quadratum, erit $TM^2 = \frac{y^2dx^2 + y^2dy^2}{dy^2} = y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}$, vbi si valor quantitatis dx^2 paulo ante inuentus substituatur, erit $TM^2 = y^2 + \frac{4y^4}{p^2}$,

ac pro y^2 ponendo px erit $TM^2 = px + \frac{4p^2x^2}{p^2} = px + 4x^2$; adeoque $TM = \surd(px + 4x^2)$.

69. *Coroll.* Idem eruitur tangentis valor etiam ope trianguli rectanguli TPM, in quo $TM^2 = PM^2 + PT^2$. Eſt enim $PM^2 = y^2 = px$, $PT^2 = 4x^2$ (41): ergo $TM^2 = px + 4x^2$, $TM = \surd(px + 4x^2)$.

70. *PROBL. Inuenire tangentem TM in circulo.* *Fig. 8.*

Reſol. Cum ſit in circulo $y^2 = ax - x^2$ (44) erit differentiando $2ydy = adx - 2xdx$, et hinc $dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$, ac $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{(a - 2x)^2}$: ſi iam hic valor ſubſtituatur in expreſſione quadrati tangentis $y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}$ (68), erit $TM^2 = y^2 + \frac{4y^4}{(a - 2x)^2}$, ac pro y^2 ponendo $ax - x^2$ erit $TM^2 = ax - x^2 + \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a - 2x)^2}$, et reducendo omnia ad communem denominatorem $(a - 2x)^2 = a^2 - 4ax + 4x^2$ erit $TM^2 = \frac{a^3x - a^2x^2 - 4a^2x^2 + 4ax^3 + 4ax^3 - 4x^4 + 4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a - 2x)^2}$ $= \frac{a^3x - a^2x^2}{(a - 2x)^2}$, adeoque $TM = \frac{\surd(a^3x - a^2x^2)}{(a - 2x)} = \frac{a\surd(ax - x^2)}{a - 2x}$, ſeu pro $\surd(ax - x^2)$ ponendo y, erit $TM = \frac{ay}{a - 2x}$; quare $a - 2x : a = y : TM$.

71. *Coroll. 1.* Idem eruitur tangentis valor etiam ope trianguli rectanguli TPM, in quo TM^2 eſt $= PM^2 + PT^2$. Eſt enim $PM^2 = y^2 = ax - x^2$, $PT^2 = \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a - 2x)^2}$ (44): ergo $TM^2 = ax - x^2 + \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a - 2x)^2}$ prorſus vt ſupra.

72. *Coroll. 2.* Cum ſit $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a - x}$ (44) $= \frac{ax}{a - 2x}$, erit $TB = AT + AB = \frac{ax}{a - 2x} + a = \frac{ax + a^2 - 2ax}{a - 2x} = \frac{a^2 - ax}{a - 2x}$: ergo

$AT \cdot TB = \left(\frac{ax}{a-2x}\right) \cdot \left(\frac{a^2-ax}{a-2x}\right) = \frac{a^3x-a^2x^2}{(a-2x)^2} = TM^2$ (70); vnde TB : TM = TM : TA. Conf. Elem. 423.

Scholion. In ceteris curuis commodius inuenitur valor tangentis ope trianguli rectanguli TPM data ordinata PM, et subtangente PT, id quod exemplo parabolae, et circuli paulo ante ostendimus.

Fig. 7. 73. *PROBL. Inuenire formulam generalem subnormalis PQ in curua quacunque algebraica.*

Resol. Quoniam triangula MRm, PMQ similia sunt ob angulos ad R et P rectos, et QMR + RMm = QMR + PMQ, adeoque RMm = PMQ, erit MR : mR = PM : PQ, seu $dx : dy = y$: PQ; vnde PQ $= \frac{ydy}{dx}$.

74. *Coroll.* Si ergo aequatio data ad curuam, cuius subnormalis quaeritur, differentietur, ac inde eliciatur valor quantitatis dx, et in formula generali inuenta substituatur, reperietur subnormalis in terminis finitis, vt iam exempla docebunt.

75. *PROBL. Inuenire subnormalem PQ in parabola.*

Resol. Quoniam in parabola $y^2 = px$, erit differentiando $2ydy = pdx$, adeoque $dx = \frac{2ydy}{p}$, quo valore in formula generali subnormalis $\frac{ydy}{dx}$ (73) substituto erit PQ $= \frac{pydy}{2ydy} = \frac{1}{2}p$; hoc est, subnormalis in parabola aequatur semiparametro axis, ac proinde constans est. Conf. Elem. 659.

Fig. 8. 76. *PROBL. Inuenire subnormalem PQ in circulo.*

Resol. Quoniam in circulo $y^2 = ax - x^2$, erit differentiando $2ydy = adx - 2xdx$, adeoque $dx = \frac{2ydy}{a-2x}$, quo valore

in

in formula generali subnormalis $\frac{ydy}{dx}$ substituto erit PQ $= \frac{aydy - 2xydy}{2ydy}$ $= \frac{a - 2x}{2} = \frac{1}{2}a - x$.

77. *Coroll.* Patet adeo punctum Q cadere in centrum circuli, adeoque in circulo omnes normales ad centrum concurrere, seu esse radios: sunt ergo radii ad tangentes perpendiculares. Conf. Elem. 302.

78. *PROBL. Inuenire subnormalem PQ in ellipsi.* Fig. 9.

Resol. Cum sit in ellipsi $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (Elem. 630), seu $ay^2 = apx - px^2$, erit differentiando $2aydy = apdx - 2pxdx$, et hinc $dx = \frac{2aydy}{ap - 2px}$, quo valore in formula generali subnormalis $\frac{ydy}{dx}$ substituto erit PQ $= \frac{apydy - 2pxydy}{2aydy} = \frac{ap - 2px}{2a}$; ergo $2a : a - 2x = p :$ PQ.

79. *Coroll. 1.* Cum aequatio ad hyperbolam solo signo differat ab aequatione ad ellipsim (Elem. 630.), eadem plane ratione inuenitur subnormalis in hyperbola.

80. *Coroll. 2.* Inuenta subnormali PQ nullo negotio reperitur normalis QM ope trianguli rectanguli PMQ, in quo MQ $= \sqrt{(PM^2 + PQ^2)}$: quo tamen pacto etiam ex aequatione ad curuam data immediate erui possit, vno, alteroue exemplo ostendemus.

81. *PROBL. Inuenire formulam generalem normalis MQ in curua quacunque algebraica.* Fig. 7.

Resol. Cum triangula MRm, PMQ similia sint, erit MR : Mm = PM : MQ, seu $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = y :$ MQ; vnde MQ $= \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

82. *Coroll.* Si ergo aequatio ad curuam data differentietur, ac inde erutus valor quantitatis dx^2 in hac formula substituatur, habebitur normalis in terminis datis, ac a differentiali liberis, vti e sequentibus adparebit.

83. *PROBL. Inuenire normalem MQ in parabola.*

Resol. Formula generalis paulo ante inuenta eleuetur ad quadratum, erit $MQ^2 = \frac{y^2dx^2 + y^2dy^2}{dx^2} = y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}$: est vero in parabola $y^2 = px$, et differentiando $2ydy = pdx$, adeoque $dx = \frac{2ydy}{p}$, et $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$, quo valore substituto erit $MQ^2 = y^2 + \frac{p^2y^2dy^2}{4y^2dy^2}$ $= y^2 + \frac{1}{4}p^2$, et pro y^2 ponendo px erit $MQ^2 = px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{4px + p^2}{4}$; igitur $MQ = \sqrt{\left(\frac{4px + p^2}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4px + p^2)}$.

84. *Coroll.* Facile adparet eundem elici normalis valorem etiam ope trianguli rectanguli MPQ. Est enim $MQ^2 = MP^2 + PQ^2$; atqui $MP^2 = y^2 = px$, $PQ^2 = \frac{1}{4}p^2$ (75): ergo $MQ^2 = px + \frac{1}{4}p^2$ prorsus vt supra.

Fig. 8. 85. *PROBL. Inuenire normalem MQ in circulo.*

Resol. Quoniam in circulo $y^2 = ax - x^2$, erit differentiando $2ydy = adx - 2xdx$, et hinc $dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$, ac $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$. Eleuetur iam formula generalis pro normali inuenta $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ad quadratum, erit $MQ^2 = \frac{y^2dx^2 + y^2dy^2}{dx^2} = y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}$, vbi si valor quantitatis dx^2 paulo ante inuentus substituatur, erit $MQ^2 = y^2 + \frac{a^2y^2dy^2 - 4axy^2dy^2 + 4x^2y^2dy^2}{4y^2dy^2} = y^2 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4}$, et pro y^2 ponendo $ax - x^2$ erit $MQ^2 = ax - x^2 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4} = \frac{4ax - 4x^2 + a^2 - 4ax + 4x^2}{4} = \frac{1}{4}a^2$, et hinc $MQ = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$.

86. *Coroll. 1.* Denuo adparet normalem in circulo esse ipsum radium, ac proinde radium ad tangentem perpendicularem esse.

87. *Coroll. 2.* Adparet item eundem erui normalis valorem etiam ope trianguli rectanguli MPQ, in quo $MQ^2 = MP^2 + PQ^2$, si pro MP^2 et PQ^2 valores eorundem substituantur.

Scholion. Si angulus TPM non foret rectus, qualem in tangente inuestiganda esse supposuimus, inuenta subtangente PT, ordinata PM, et angulo intercepto P facile reperitur tangens TM, et angulus TMP, qui a recto subductus relinquit angulum PMQ, cum ex natura normalis angulus TMQ semper rectus sit: quare trianguli PMQ resolutio dabit subnormalem PQ, et normalem MQ. *Fig. 7.*

Si vero curua non ad axem, vel diametrum, sed ad focum F referatur, eaedem plane nascentur subtangentis, tangentis, subnormalis, et normalis generales expressiones. Si enim per focum F ducatur FT ordinatae FM perpendicularis, occurrens tangenti TM in puncto T, ducatur item alia ordinata F*m* priori infinite propinqua, ac denique MR rectae FT parallela, similia erunt triangula MR*m*, TMF quae praeter angulos rectos F et R habebunt angulos M*m*R, TMF nonnisi angulo infinitesimo MF*m* discrepantes, atque adeo pro aequalibus habendos (Elem. 367). Iam ope horum triangulorum eaedem, vt diximus, formulae generales eliciuntur: si ergo detur aequatio curuae ad focum relatae, eodem plane, quo in superioribus vsi fuimus, modo inueniuntur subtangentes, tangentes, subnormales, atque normales. *Fig. 14. 15.*

CAPVT III.

De vsu Calculi Differentialis in determinandis curuarum Asymptotis.

Fig 10. 88. *PROBL. Determinare asymptoti positionem in curua quacunque algebraica.*

Resolutio. Quoniam asymptotus ad curuam continenter accedens cum eadem nusquam concurrit, si punctum contactus M cogitetur abire in infinitum, seu si abscissa AP, et ordinata PM cogitentur fieri infinitae, patet tangentem TM abire in asymptotum, et quantitates constantes respectu variabilium x et y infinitarum euanescere. Si ergo e valore inuento rectae AT abiiciantur termini finiti, in quibus neutra variabilium x et y continetur, abibit AT in AC, et triangulum ATE in triangulum ACG, eritque punctum C determinatum, per quod asymptotus ducenda est. Punctum alterum G determinabitur, si ob triangulorum MRm, CAG similitudinem fiat MR : mR $=$ CA : AG, seu $dx : dy =$ CA : AG; deinde aequatio ad curuam data differentietur, ac omissis terminis, qui ob x et y infinitas euanescunt, reperiatur ratio $dx : dy$: sic enim determinabitur recta AG, per cuius extremum ex puncto inuento C ducenda est asymptotus.

89. *Coroll.* Si e data ad curuam quampiam aequatione puncta C et G dicto modo determinari nequeant, indicio erit eiusmodi curuam non habere asymptotum. E. g. cum in parabola AT sit $= x$ (42), si fiat $x = \infty$, erit etiam AT $= \infty$, adeoque punctum T, quod in ea hypothesi congruit cum puncto C, per quod asymptotus ducenda est, nuspiam erit: igitur parabola non habet asymptotum.

90. *PROBL. Determinare positionem asymptoti in hyperbola communi.*

Resol. Quoniam tangens TM abit in aſymptotum, ſi x et y ponantur $=\infty$, cum ſit $AT=\frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}$ (53), fiat $x=\infty$, euaneſcet $\frac{1}{2}a$ reſpectu reliquorum terminorum, eritque $AT=\frac{\frac{1}{2}ax}{x}=\frac{1}{2}a$, adeoque punctum T cadet in centrum hyperbolae C, per quod ducenda eſt aſymptotus.

Porro in hyperbola $ay^2=apx+px^2$: ergo ob $x=\infty$ euaneſcit apx reſpectu px^2, eritque $ay^2=px^2$, ſeu $y\sqrt{a}=x\sqrt{p}$: quare differentiando erit $dy\sqrt{a}=dx\sqrt{p}$, et hinc $dx:dy=\sqrt{a}:\sqrt{p}$; atqui in triangulis MRm, CAG ſimilibus eſt MR : mR $=$ CA : AG, ſeu $dx:dy=\frac{1}{2}a:AG$; quare erit etiam $\sqrt{a}:\sqrt{p}=\frac{1}{2}a:AG$, et hinc $AG=\frac{a\sqrt{p}}{2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a^2p}}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\sqrt{ap}$, adeoque $AG^2=\frac{1}{4}ap$: eſt ergo AG media proportionalis inter $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}p$, ſeu eſt ſemiaxis coniugatus (Elem. 636).

Quare ſi in vertice hyperbolae A erigatur ſemiaxis coniugatus AG ordinatae PM parallelus, ac e centro C per eiusdem extremum G ducatur recta indefinita, erit ea hyperbolae aſymptotus. Conf. Elem. 642.

91. *PROBL. Determinare poſitionem aſymptoti in hyperbola cubica, ad quam eſt* $ay^3=apx^2+px^3$.

Resol. Cum poſitis x et $y=\infty$ terminus apx^2 euaneſcat, erit $ay^3=px^3$, ſeu $y\sqrt[3]{a}=x\sqrt[3]{p}$, et differentiando $dy\sqrt[3]{a}=dx\sqrt[3]{p}$; vnde $dx:dy=\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{p}$: atqui in triangulis MR$m$, CAG ſimilibus eſt MR : mR $=$ AC : AG, ſeu $dx:dy=AC:AG$; quare etiam $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{p}=AC:AG$, et hinc $AG=\frac{AC.\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{AC^3.p}}{\sqrt[3]{a}}$

Porro AC ſic inuenitur. Quaeratur imprimis ſubtangens PT, qua reperta habebitur AT, in cuius valore ſi fiat $x = \infty$, abibit AT in AC. Igitur cum ex natura huiusmodi hyperbolae ſit $ay^3 = apx^2 + px^3$, erit differentiando $3ay^2dy = 2axpdx + 3px^2dx$, et hinc $dx = \frac{3ay^2dy}{2apx + 3px^2}$, quo valore in formula generali ſubtangentis $\frac{ydx}{dy}$ ſubſtituto erit $PT = \frac{3ay^3}{2apx + 3px^2}$, et pro ay^3 ponendo eius valorem $apx^2 + px^3$ erit $PT = \frac{3apx^2 + 3px^3}{2apx + 3px^2} = \frac{3ax^2 + 3x^3}{2ax + 3x^2}$: ergo $AT = PT - AP = \frac{3ax^2 + 3x^3}{2ax + 3x^2} - x = \frac{3ax^2 + 3x^3 - 2ax^2 - 3x^3}{2ax + 3x^2} = \frac{ax^2}{2ax + 3x^2}$. Si iam fiat $x = \infty$, abibit AT in AC, eritque, neglecto termino $2ax$, $AC = \frac{ax^2}{3x^2} = \frac{1}{3}a$.

Si ergo in valore rectae AG ſupra inuento $\frac{\sqrt[3]{AC^3 . p}}{\sqrt[3]{a}}$ loco AC ſubſtituatur valor nunc inuentus $\frac{1}{3}a$, erit $AG = \frac{\sqrt[3]{a^3p}}{\sqrt[3]{27a}} = \frac{\sqrt[3]{a^3p}}{3\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2p}}{3}$: id eſt: ſi inter axem transuerſum hyperbolae a, et eiusdem parametrum p, quaerantur duae mediae geometrice proportionales, et accipiatur prioris pars tertia, erit ea = AG (Elem. 236). Inuentis rectis AC et AG determinatur ſitus aſymptoti vt in praecedenti problemate.

Fig. 16. 92. PROBL. *Determinare poſitionem aſymptoti in curua, ad quam eſt* $y^3 - x^3 = axy$.

Reſol. Sumatur differentiale aequationis datae, erit $3y^2dy - 3x^2dx = axdy + aydx$; vnde $dx = \frac{3y^2dy - axdy}{3x^2 + ay}$, quo valore in for-

mula generali subtangentis $\frac{ydx}{dy}$ substituto erit $PT = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 + ay}$; igitur $AT = PT - AP = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 + ay} - x = \frac{3y^3 - axy - 3x^3 - axy}{3x^2 + ay}$ $= \frac{axy}{3x^2 + ay}$ ob $3y^3 - 3x^3 = 3axy$.

Ponamus breuitatis caussa AT seu $\frac{axy}{3x^2 + ay} = t$, erit $axy = 3x^2t + ayt$, et hinc $y = \frac{3x^2t}{ax - at}$. Fiat iam $x = \infty$, erit $-at$ respectu ax aequale nihilo, adeoque $y = \frac{3x^2t}{ax} = \frac{3tx}{a}$, quo valore in aequatione data ad curuam substituto erit $\frac{27t^3x^3 - a^3x^3}{a^3} = \frac{3atx^2}{a}$ $= \frac{3a^3tx^2}{a^3}$: quare $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3tx^2$, seu negligendo terminum $3a^3tx^2$ respectu reliquorum euanescentem, erit $27t^3x^3 - a^3x^3 = 0$, hinc $27t^3x^3 = a^3x^3$, et $27t^3 = a^3$, ac radicem cubicam vtrinque extrahendo $3t = a$, seu $t = AT = \frac{1}{3}a$; atqui posito $x = \infty$ AT fit $=$ AC: ergo $AC = \frac{1}{3}a$.

Porro ob triangula TPM, TEA similia erit $TP : PM = TA : AE$, seu $\frac{ydx}{dy} : y = \frac{ydx}{dy} - x : AE$, aut $\frac{ydx}{dy} : y = \frac{ydx - xdy}{dy} : AE$; vnde $AE = y - \frac{xdy}{dx}$. Sit iam breuitatis caussa AE seu $y - \frac{xdy}{dx} = n$, erit $ydx - xdy = ndx$, ac pro dx substituendo valorem supra erutum $\frac{3y^2dy - axdy}{3x^2 + ay}$ erit $\frac{3y^3dy - axydy}{3x^2 + ay} - x\,d\,y = \frac{3ny^2dy - anxdy}{3x^2 + ay}$, et omnia per $3x^2 + ay$ multiplicando $3y^3dy - axydy - 3x^3dy - axydy = 3ny^2dy - anxdy$, seu $3y^3 - 2axy - 3x^3 = 3ny^2 - anx$, adeoque $n = \frac{3y^3 - 2axy - 3x^3}{3y^2 - ax}$, et

pro $3y^3 - 3x^3$ ponendo $3axy$ erit $n = \frac{axy}{3y^2 - ax}$, et hinc $x = \frac{3ny^2}{ay + an}$, seu ob $y = \infty$ negligendo terminum an erit $x = \frac{3ny^2}{ay} = \frac{3ny}{a}$, quo valore substituto in data ad curuam aequatione erit $y^3 - \frac{27n^3y^3}{a^3} = axy$, seu multiplicando omnia per a^3 erit $a^3y^3 - 27n^3y^3 = a^4xy$, ac ob $y = \infty$ negligendo terminum a^4xy erit $a^3y^3 - 27n^3y^3 = 0$, adeoque $a^3y^3 = 27n^3y^3$, seu $a^3 = 27n^3$, et $a = 3n$, ac $n =$ AE, quae hic abit in AG, $= \frac{1}{3} a$.

Si ergo fiat AC $= \frac{1}{3} a$, ac etiam AG $= \frac{1}{3} a$, habebuntur puncta C et G situm asymptoti determinantia.

CAPVT IV.

De vsu Calculi Differentialis in methodo de Maximis et Minimis.

Fig. 17.20. 93. Dum in curua quapiam, quae ordinatas habet parallelas, crescente abscissa AP crescit etiam ordinata PM vsque ad certum limitem C, ac deinceps rursus decrescit: vel dum crescente abscissa AP decrescit ordinata PM vsque ad certum limitem C, ac deinde iterum crescit, ordinata eiusmodi CD in limite illo C dicitur esse in primo casu quoddam *maximum*, in secundo quoddam *minimum*: methodus autem, qua huiusmodi ordinata, vel eidem respondens abscissa inuestigatur, *methodus de maximis, et minimis* adpellatur. (*Fig.* 18.19.)

94. *Coroll. 1.* Si ergo forma propositae curuae perspecta sit, facile diiudicabitur, an gaudeat maximis, vel minimis ordinatis. Nempe 1) si crescentibus abscissis crescant ordinatae in infinitum, vti fit in parabola, curua carebit maximo. 2) Si abscissis crescentibus ordinatae decrescant vsque ad nihilum, curua carebit

bit minimo. 3) Si ordinatae crefcant in infinitum, at non decrefcant vsque ad nihilum, femper habebit curua vnum, vel plura minima, at nullum maximum. 4) Si ordinatae decrefcant vsque ad nihilum, et non crefcant in infinitum, vt in circulo, et ellipfi, curua femper habebit vnum, vel plura maxima, fed nullum minimum. 5) Si ordinatae neque crefcant in infinitum, neque decrefcant vsque ad nihilum, curua habebit femper aliquod maximum, et aliquod minimum.

95. *Coroll. 2.* Cum quaelibet quantitas continenter crefcens vel decrefcens, habensque certum aliquem incrementi vel decrementi limitem, vltra quem decrefcat, fi ante crefcebat; aut crefcat, fi ante decrefcebat, repraefentari poffit per ordinatam alicuius curuae easdem incrementi vel decrementi viciffitudines habentem, quas illa ipfa quantitas, perfpicuum eft hanc methodum ad omnem eiusmodi quantitatem maximam vel minimam determinandam adhiberi poffe, quemadmodum exemplis copiofe infra declarabitur.

96. Si ordinata CD ponatur effe maxima vel minima, et capiatur quaelibet abfciffa $AP = x$, eique refpondens ordinata $PM = y$, cui ducatur alia infinite propinqua *pm*, item tangens TM, et recta MR ad AC parallela, erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$, et ob triangula TMP vel TMQ, et MR*ml* fimilia $TP : PM$, vel $TQ : QM = MR : mR = dx : dy$. Fingamus iam ordinatam PM ad fitum CD motu parallelo fenfim accedere, ac demum cum eadem congruere: euidens eft fubtangentem TP vel TQ continenter fore maiorem, et congruentibus PM et CD fore infinitam; tangentem vero TM fore axi AC parallelam: adeoque etiam rationem $TP : PM$, vel $TQ : QM$, feu $dx : dy$ fore rationem infiniti ad finitum, cum PM vel QM femper finita maneat: erit ergo *dy* refpectu *dx* aequale nihilo, et *dx* refpectu *Fig. 17. 18.*

dy aequale infinito; id eſt, in limite maximae vel minimae ordinatae C erit $dy = o$, $dx = \infty$.

Fig. 19. 20. 97. Si poſitis iisdem in Fig. 19, et 20 ordinata PM cogitetur motu parallelo ſenſim accedere ad ſitum ordinatae CD, ac demum cum eadem congruere, patet ſubtangentem TP vel TQ continenter fore minorem, et congruentibus PM ac CD fore aequalem nihilo, adeoque tangentem TM fore axi AC perpendicularem, et rationem TP : PM, vel TQ : QM, ſeu $dx : dy$ fore rationem nihili ad quantitatem finitam: erit ergo dx reſpectu dy aequale nihilo, et dy reſpectu dx aequale infinito, id eſt, in limite maximae vel minimae ordinatae C erit $dx = o$, $dy = \infty$.

98. His probe animaduerſis, ſi iam proponatur inueniendum aliquod maximum, vel minimum, ſi illud ſit ordinata alicuius curuae, ex aequatione eiusdem eliciatur valor quantitatis dy: ſi non ſit, exprimatur eius valor analytice ſecundum quaeſtionis ſtatum, et ſupponatur eſſe ordinata alicuius curuae, voceturque y; tum facta differentiatione eruatur valor quantitatis dy. Quia vero in hoc ſecundo caſu, quemadmodum etiam in iis omnibus, in quibus aequatio duntaxat ad curuam datur, plerumque ignoratur forma curuae, ad quam quaeſitum maximum, vel minimum pertinet, ac proinde neſcitur, an in loco maximi, vel minimi tangens axi parallela, an perpendicularis ſit; ſeu an ſit $dy = o$, an $= \infty$, idcirco ponatur imprimis $dy = o$, et ſi hoc poſito reperiatur abſciſſa x, cui maxima, vel minima ordinata reſpondet, quaeſtio ſoluta eſt: ſi vero non reperiatur, ponatur $dy = \infty$, atque inde eruatur abſciſſa x, cuius valore in data aequatione ſubſtituto obtinebitur etiam valor maximi, vel minimi quaeſiti. Quod ſi neutra ſuppoſitio exhibeat vllum valorem determinatum quantitatis y, indicio erit curuam, ad quam data ae-

quatio pertinet, carere maximo, vel minimo. E. g. Si in parabola quaeratur maxima, vel minima ordinata, cum sit $y^2 = px$, erit $2ydy = pdx$, ac posito $dy = o$ erit $pdx = o$, vnde nullus eruitur valor quantitatis x; posito autem $dy = \infty$ erit $dy = \frac{pdx}{2y} = \infty$, et hinc $pdx = \infty$, vnde rursus nullus eruitur valor determinatus pro x, adeoque nec pro maxima, vel minima ordinata y: quare parabola caret maximo, et minimo.

Scholion. Postquam valor maximi, aut minimi quaesiti analytice expressus est, non est necesse, vt expresse ponatur $= y$, sed potest tacite haberi pro ordinata alicuius curuae, atque adeo eius differentiale illico poni $= o$, vel $= \infty$, id quod exemplis infra illustrabimus.

99. PROBL. *Inuenire in circulo maximam ordinatam CD ad diametrum AB adplicatam.* *Fig. 17.*

Resol. Sit diameter circuli AB $= a$, abscissa quaecunque AP $= x$, eidem respondens ordinata PM $= y$, erit ex natura circuli $y^2 = ax - x^2$ (Elem. 420), et hinc differentiando $2ydy = adx - 2xdx$, vbi si fiat $dy = o$, erit $adx - 2xdx = o$, adeoque $adx = 2xdx$, et $a = 2x$, vnde $x = \frac{1}{2}a$. Adparet ergo abscissam maximae ordinatae respondentem esse ipsum circuli radium, ac proinde maximam ordinatam esse in centro. Vt iam valor maximae ordinatae determinetur, in circuli aequatione $y^2 = ax - x^2$ pro x substituatur valor inuentus $\frac{1}{2}a$, erit $y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{2}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$, adeoque $y = \frac{1}{2}a$, seu maxima ordinata est radius.

100. *Coroll. 1.* Iidem eruentur quantitatum x et y valores, si e data circuli aequatione eruatur valor quantitatis dx, nempe $\frac{2ydy}{a-2x}$, et ponatur $= \infty$: erit enim denominator $a - 2x$

respectu numeratoris $= 0$, adeoque $a = 2x$, et $x = \frac{1}{2} a$ vt ante, quod quidem semel hic adnotasse sufficiat.

Fig. 18. 101. *Coroll.* 2. Si quaeratur minima circuli ordinata CD ad rectam AC diametro FG parallelam adplicata, satis erit quaerere ordinatam maximam OD ad diametrum FG adplicatam; haec enim producta vsque ad lineam abscissarum AC dabit ordinatam minimam CD.

Fig. 17. 102. *PROBL. Inuenire maximam ordinatam CD in ellipsi.*

Resol. Si axis transuersus AB sit $= a$, abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, parameter $= p$, erit $ay^2 = apx - px^2$ (Elem. 630), et differentiando $2aydy = apdx - 2pxdx$; vbi si fiat $dy = 0$, erit $apdx - 2pxdx = 0$, et hinc $apdx = 2pxdx$, adeoque $a = 2x$, et $x = \frac{1}{2} a$ prorsus vt in circulo. Vt iam valor ordinatae maximae determinetur, in data ad ellipsim aequatione $ay^2 = apx - px^2$ loco x ponatur valor nunc inuentus $\frac{1}{2} a$, erit $ay^2 = \frac{1}{2} pa^2 - \frac{1}{4} pa^2 = \frac{2}{4} pa^2 - \frac{1}{4} pa^2 = \frac{1}{4} pa^2$, vnde $y^2 = \frac{1}{4} pa = \frac{1}{2} a . \frac{1}{2} p$, et hinc $\frac{1}{2} a : y = y : \frac{1}{2} p$, hoc est, maxima ordinata est semiaxis coniugatus. (Conf. Elem. 636).

Fig. 21. 103. *Coroll.* Si quaeratur minima ordinata MD adplicata ad rectam OR diametro AB parallelam, satis erit inuenire maximam QD ad diametrum AB adplicatam; haec enim producta vsque ad lineam abscissarum OR dabit ordinatam minimam MD. Sin autem quaeratur ordinata minima CD ad lineam abscissarum OR perpendicularis, dum ordinatae ad diametrum obliquae sunt, a puncto extremo ordinatae maximae QD demittenda erit perpendicularis DC, erit ea minima ordinata quaesita. Ducta enim quauis alia ordinata PN priori QD parallela, ac demissa perpendiculari NF, similia erunt triangula DMC, NOF, adeoque DC : NF = DM : NO; atqui DM < NO; ergo etiam DC < NF,

id quod eodem pacto demonstratur comparate ad quasuis alias perpendiculares.

104. PROBL. *Inuenire maximam ordinatam CD in curua ADB, cuius ordinatae sint mediae proportionales inter abscissas circuli AEB, et ordinatas eisdem respondentes.* Fig. 22.

Resol. Sit origo abscissarum in A, diameter circuli AB $= a$, quaelibet eius abscissa $= x$, ordinata correspondens $= y$, ordinata datae curuae $= u$, erit ex hypothesi $x : u = u : y$, adeoque $u^2 = xy$, ac differentiando $2udu = xdy + ydx$; atqui $dy = \frac{adx - 2xdx}{2y}$ (99): ergo hoc valore substituto erit $2udu = \frac{axdx - 2x^2dx}{2y} + ydx$, seu omnia multiplicando per $2y$ erit $4uydu = axdx - 2x^2dx + 2y^2dx$, vbi si ponatur $du = 0$, erit $axdx - 2x^2dx + 2y^2 dx = 0$, seu $2y^2 = 2x^2 - ax$, et pro y^2 ponendo $ax - x^2$ erit $2ax - 2x^2 = 2x^2 - ax$, siue $3ax = 4x^2$, et $3a = 4x$, ac denique $x = \frac{3}{4}a$. Si ergo in diametro circuli AB capiatur AC $= \frac{3}{4}$ AB, erit ordinata CD in puncto C adplicata omnium maxima.

105. PROBL. *Inuenire minimam ordinatam CD in curua LD, ad quam est* $y - a = a^{\frac{1}{3}} . (a - x)^{\frac{2}{3}}$. Fig. 19.

Resol. Datam aequationem differentiando erit $dy = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{3}} . - dx\ (a - x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{(a-x)}}$: si ergo fiat $dy = 0$, erit $= \frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{(a-x)}} = 0$, et omnia per $3\sqrt[3]{(a - x)}$ multiplicando erit $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$, vnde nullus potest erui valor pro x. Fiat ergo $dy = \infty$, erit etiam $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{(a-x)}} = \infty$, adeoque denominator respectu nume-

ratoris erit infinite paruus, seu $3\sqrt[3]{(a-x)}=0$, et hinc $a-x=0$, seu $a=x$. Si iam in data aequatione pro x substituatur a, erit $y-a=\sqrt[3]{a}\,.\,(a-a)^{\frac{2}{3}}=0$, ac proinde $y=a$.

Scholion. Si ramus vterque LDK in curua proposita simul accipiatur, et aequatio $y-a=\sqrt[3]{a}\,.\,(a-x)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{(a^2-2ax+x^2)}=\sqrt[3]{(a^3-2a^2x+ax^2)}$ differentietur, erit $dy=\frac{1}{3}\,.\,(-2a^2dx+2axdx)\,.\,(a^3-2a^2x+ax^2)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2axdx-2a^2dx}{3\sqrt[3]{(a^3-2a^2x+ax^2)^2}}$, vbi siue dy fiat $=0$, siue $=\infty$, semper reperietur $x=a$, quod quidem semper indicio est punctum, in quo inuenta ordinata y terminatur, esse concursum duorum curuae ramorum, quemadmodum in curuarum theoria docetur.

106. PROBL. *Inuenire maximam, vel minimam ordinatam curuae, ad quam est $2axy=ax^2-bx^2+a^3$.*

Resol. Differentietur aequatio data, erit $2axdy+2aydx=2axdx-2bxdx$, et hinc $2axdy=2axdx-2bxdx-2aydx$, vbi si fiat $dy=0$, erit $2axdx-2bxdx-2aydx=0$, seu $ax-bx=ay$, adeoque $x=\frac{ay}{a-b}$: si ergo hic valor loco x in data aequatione substituatur, erit $\frac{2a^2y^2}{a-b}=\frac{a^3y^2-a^2by^2}{(a-b)^2}+a^3$, seu omnia multiplicando per $a-b$, et diuidendo per a^2, erit $2y^2=\frac{ay^2-by^2}{a-b}+a^2-ab$, ac omnia reducendo ad eundem denominatorem, seu per $a-b$ multiplicando erit $2ay^2-2by^2=ay^2-by^2+a^3-2a^2b+ab^2$, seu $ay^2-by^2=a^3-2a^2b+ab^2$, ac proinde $y^2=\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{a-b}=a^2-ab$, et $y=\sqrt{(a^2-ab)}$, vel

$y = -\surd(a^2 - ab)$, nempe prior valor respondet abscissae positiuae, posterior negatiuae.

107. *Coroll.* Si poneretur $dy = \infty$, foret $\frac{2axdx - 2bxdx - 2aydx}{2ax} = \infty$, et hinc denominator $2ax = 0$, adeoque $x = 0$, quo valore in data ad curuam aequatione substituto fieret $a^3 = 0$; quod cum absurdum sit, facile adparet curuam non habere alia maxima, vel minima, praeter priora.

Scholion. Quod si forma curuae, ad quam data aequatio pertinet, perspecta non sit, vel e praecedente problemate adparet nesciri omnino, an quantitas hac methodo inuenta sit aliquod maximum, an sit aliquod minimum: potest nihilominus etiam sine curuae descriptione discerni hoc pacto: Assignetur in data aequatione abscissae valor inuento nonnihil maior, vel minor, et siquidem hac ratione prodit ordinata maior priore, quantitas inuenta fuit ordinata minima; si minor prodit, fuit maxima. E. g. ex aequatione $y^2 = ax - x^2$ eruimus supra $x = \frac{1}{2}a$, et $y = \frac{1}{2}a$: finge te nescire curuam, ad quam data haec aequatio pertinet, ac proinde nescire, an inuenta ordinata y sit maxima, an minima. Auge nonnihil valorem abscissae inuentae x ponendo $x = \frac{2}{3}a$, erit hoc valore in data aequatione substituto $y^2 = \frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{6}{9}a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{2}{9}a^2$, cum ante fuerit $= \frac{1}{4}a^2$; atqui $\frac{2}{9}a^2 < \frac{1}{4}a^2$: ergo crescente nonnihil abscissa decrescit ordinata: concludes adeo inuentum fuisse y maximum non minimum.

CAPVT V.

Adplicatio methodi praecedentis ad varia problemata geometrica. *Fig. 23.*

108. PROBL. *Determinare rectam QM, quae a dato in axe puncto Q ad curuam algebraicam ducta sit omnium rectarum indidem ductarum breuissima.*

Resol. Sit abſciſſa AP $= x$, eidem reſpondens ordinata PM $= y$, recta QM $= u$, AQ $= b$, erit PQ $= b - x$: quare cum ſit $QM^2 = PM^2 + PQ^2$, erit ſubſtitutis valoribus $u^2 = y^2 + b^2 - 2bx + x^2$, ac proinde differentiando $2udu = 2ydy - 2bdx + 2xdx$: ſi ergo fiat $du = 0$, erit $ydy - bdx + xdx = 0$. Itaque ſi e data ad curuam aequatione eruatur valor quantitatis ydy, et in hac ſubſtituatur, inuenietur abſciſſa x, ad quam adplicata ordinata PM determinabit in curua data punctum M, ad quod recta omnium breuiſſima e puncto Q ducenda ſit.

109. *Coroll. 1.* Si data curua fuerit parabola, erit $y^2 = px$, ac differentiando $2ydy = pdx$, vnde $ydy = \frac{1}{2} pdx$; quo valore in aequatione ſuperiore ſubſtituto erit $\frac{1}{2} pdx - bdx + xdx = 0$, et hinc $\frac{1}{2}p = b - x =$ PQ: eſt ergo PQ ſubnormalis (75), adeoque QM normalis. Quare perpendicularis e puncto Q ad parabolam ducta eſt omnium breuiſſima.

110. *Coroll. 2.* Si data curua fuerit circulus, erit $y^2 = ax - x^2$, et differentiando $2ydy = adx - 2xdx$, vnde $ydy = \frac{1}{2} adx - xdx$, quo valore in aequatione ſuperiori $ydy - bdx + xdx = 0$ (108) ſubſtituto erit $\frac{1}{2}adx - xdx - bdx + xdx = 0$, ſeu $\frac{1}{2}adx - bdx = 0$, et hinc $\frac{1}{2}a = b$. Patet ergo 1) Punctum datum Q debere cadere in centrum circuli, vt ducta recta breuiſſima QM poſſit ex M duci ordinata MP; et hinc ſi punctum Q non ſit in centro, nequit duci vlla ordinata ex M ad diametrum AQ, ac proinde punctum M cadit in A, ſeu QA eſt linea breuiſſima. Conf. Elem. 335. 2) Cum aequatio inuenta $\frac{1}{2} a = b$ non contineat in ſe variabilem x, ſed meras conſtantes a et b, ſi punctum Q cadat in centrum, perſpicuum eſt poſſe abſciſſam x aſſumi pro arbitrio, modo ne fiat diametro maior, adeoque poſſe punctum M eſſe vbicunque in peripheria, eſſeque circuli radios omnes inter ſe aequales.

111. *Coroll. 3.*

111. *Coroll. 3.* Si data curua fuerit ellipsis, erit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, atque adeo differentiando $2ydy = pdx - \frac{2pxdx}{a}$, et hinc $ydy = \frac{1}{2} pdx - \frac{pxdx}{a}$, quo valore in aequatione generali $ydy - bdx + xdx = o$ substituto erit $\frac{1}{2} pdx - \frac{pxdx}{a} - bdx + xdx = o$, ac omnia per dx diuidendo erit $\frac{1}{2} p = \frac{px}{a} - b + x = o$; vnde $\frac{1}{2} p - \frac{px}{a} = b - x = PQ$: est adeo PQ subnormalis (78), ac proinde QM normalis: ergo perpendicularis e dato puncto Q ad ellipsim ducta est omnium breuissima. Idem eodem modo patet in hyperbola.

112. *Coroll. 4.* Imo generatim cum sit $ydy - bdx + xdx = o$ (108), erit $ydy = bdx - xdx$, et hinc $\frac{ydy}{dx} = b - x = PQ$; cumque $\frac{ydy}{dx}$ sit formula generalis subnormalis (73), patet PQ esse subnormalem, ac proinde QM normalem: vt adeo vniuerse concludi possit perpendicularem lineam esse breuissimam omnium, quae a dato in axe puncto ad curuam quamcunque algebraicam duci possunt.

113. *PROBL. Determinare rectam OM, quae a dato extra curuam puncto ad curuam quamcunque algebraicam ducta sit omnium rectarum indidem ductarum breuissima.*

Resol. Dato puncto O datur etiam perpendicularis OT, quae sit $= c$, datur item $AT = f$: sit ergo abscissa $AP = x$, ordinata $PM = y$, $OM = u$, erit $MN = TP = AP - AT = x - f$, $ON = OT - PM = c - y$; quare cum sit $OM^2 = MN^2 + ON^2$, erit substitutis valoribus $u^2 = x^2 - 2fx + f^2 + c^2 - 2cy + y^2$, ac differentiando $2udu = 2xdx - 2fdx -$

$2cdy + 2ydy$; vbi si fiat $du = 0$, erit $2xdx - 2fdx - 2cdy + 2ydy = 0$, et hinc $xdx - fdx = cdy - ydy$, et $dy = \frac{xdx - fdx}{c - y}$, adeoque diuidendo omnia per dx, et multiplicando per y erit $\frac{ydy}{dx} = \frac{(x-f)y}{c-y} = \frac{MN \cdot PM}{ON}$: quare $ON : MN = PM : \frac{ydy}{dx}$; sed etiam ob triangula ONM, MPQ similia est $ON : MN = PM : PQ$: ergo $PQ = \frac{ydy}{dx}$, seu PQ subnormalis est (73), adeoque QM normalis, consequenter OM ad curuam perpendicularis. Igitur linea perpendicularis est breuissima omnium rectarum, quae a dato extra curuam puncto ad eandem duci possunt.

114. *Coroll.* Quare cum in circulo radius sit ad tangentem, ac proinde etiam ad peripheriam perpendicularis, si e dato extra circulum puncto ducenda sit ad peripheriam linea breuissima, patet eam productam debere transire per centrum: et quia etiam recta longissima eadem methodo determinatur, perspicuum est et hanc debere perpendicularem esse, atque adeo transire per centrum. Conf. Elem. 329, 335.

115. *PROBL. Determinare rectam RM, quae a dato intra curuam quamcunque algebraicam puncto R ad peripheriam eiusdem ducta sit omnium rectarum indidem ductarum breuissima.*

Resol. Dato puncto R dantur rectae $RS = c$, et $AS = f$: sit iam abscissa $AP = x$, ordinata $PM = y$, $RM = u$, erit $KR = PS = AS - AP = f - x$, $MK = PM - PK = PM - RS = y - c$: quare cum sit $RM^2 = KR^2 + MK^2$, erit substitutis valoribus $u^2 = f^2 - 2fx + x^2 + y^2 - 2cy + c^2$, ac differentiando $2udu = -2fdx + 2xdx + 2ydy - 2cdy$, vbi si fiat $du = 0$, erit $-2fdx + 2xdx + 2ydy - 2cdy = 0$, seu diuidendo omnia per 2, ac $-fdx + xdx$ transponendo erit ydy

$-cdy = fdx - xdx$, et hinc $dy = \frac{fdx - xdx}{y - c}$, ac diuidendo omnia per dx, et multiplicando per y erit $\frac{ydy}{dx} = \frac{(f - x)y}{y - c} = \frac{KR.PM}{MK}$, vnde MK : KR = PM : $\frac{ydy}{dx}$; ſed etiam ob triangula MKR, MPQ ſimilia eſt MK : KR = PM : PQ : ergo PQ $= \frac{ydy}{dx}$, ſeu PQ ſubnormalis eſt (73), atque adeo QM normalis, conſequenter RM ad curuam perpendicularis. Igitur linea perpendicularis eſt breuiſſima omnium rectarum, quae a dato intra curuam puncto ad eandem duci poſſunt.

116. *Coroll.* Cum ergo in circulo illa recta ſit ad peripheriam perpendicularis, quae producta per centrum tranſit, patet eam, quae producta per centrum tranſit, fore omnium breuiſſimam, et reſpectu oppoſitae ſemiperipheriae fore omnium longiſſimam. Conf. Elem. 335.

117. *PROBL. Conſtruere rectangulum omnium eorum maximum, quorum baſes, et altitudines eandem ſummam efficiunt.*

Reſol. Sit data ſumma $= a$, baſis quaeſiti rectanguli $= x$, erit eiusdem altitudo $= a - x$, et rectangulum ipſum $= ax - x^2$, cuius differentiale eſt $adx - 2xdx$: cum ergo rectangulum debeat eſſe maximum, fiat $adx - 2xdx = 0$, erit $adx = 2xdx$, et hinc $a = 2x$, et $x = \frac{1}{2}a$: ergo rectangulum omnium maximum erit quadratum, cuius tam baſis, quam altitudo aequatur ſemiſummae $\frac{1}{2}a$.

118. *PROBL. Conſtruere rectangulum omnium eorum maximum, qui dato circulo inſcribi poſſunt.* *Fig.* 24.

Reſol. Sit ABCD rectangulum petitum. Ductis diametris HI et FG parallelis ad rectanguli latera, diuidetur rectangulum ABCD in quatuor rectangula aequalia, quorum vnum erit

LEKB, cuius adeo quadruplum eſt maximum quaeſitum. Sit igitur radius CI $= r$, abſciſſa EK a centro computata $= x$, erit ex natura circuli BK $= \sqrt{(r^2 - x^2)}$ (Elem. 420), adeoque rectangulum EK . KB $= x\sqrt{(r^2 - x^2)}$, cuius quadruplum $4x\sqrt{(r^2 - x^2)}$ erit quaeſitum maximum, cuius differentiale more conſueto ponendum eſt $= 0$; erit adeo $4dx\sqrt{(r^2 - x^2)} - \frac{1}{2} . 4x . 2xdx (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 4dx\sqrt{(r^2 - x^2)} \frac{-4x^2dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = \frac{4r^2dx - 4x^2dx - 4x^2dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = 0$, ſeu omnia multiplicando per $\sqrt{(r^2 - x^2)}$, ac diuidendo per dx erit $4r^2 - 8x^2 = 0$, et hinc $4r^2 = 8x^2$, ſeu $r^2 = 2x^2$, ac $x^2 = \frac{1}{2}r^2$, et $x = \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$, quo valore in aequatione ſuperiore BK $= \sqrt{(r^2 - x^2)}$ ſubſtituto erit BK $= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{2}r^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}r^2} = x =$ EK: quare rectangulum LEKB, adeoque etiam eius quadruplum ABCD eſt quadratum. Hinc ex omnibus rectangulis, quae eidem circulo inſcribi poſſunt, quadratum eſt maximum.

Fig. 25. 119. *PROBL. Inuenire minimam rectam EF, quae intra cathetos anguli recti FBE per datum punctum D duci poteſt.*

Reſol. Completo rectangulo ABCD ſit AB $= a$, BC $= b$, AF $= x$, cum ſit FD^2 $=$ AD^2 $+$ AF^2 $=$ BC^2 $+$ AF^2, erit ſubſtitutis valoribus FD^2 $= b^2 + x^2$, et FD $= \sqrt{(b^2 + x^2)}$. Porro ob triangula FAD, FBE ſimilia eſt FA : FD $=$ FB : FE, ſeu $x : \sqrt{(b^2 + x^2)} = a + x$: FE, vnde FE $= \frac{a+x}{x}\sqrt{(b^2 + x^2)}$; quod cum debeat eſſe minimum, erit differentiando $\frac{(xdx - adx + xdx)}{x^2}$ $\sqrt{(b^2 + x^2)} + (\frac{a+x}{x}) . \frac{1}{2} . 2xdx (b^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-adx}{x^2}\sqrt{(b^2 + x^2)} + \frac{axdx + x^2dx}{x\sqrt{(b^2 + x^2)}} = \frac{-adx}{x^2}\sqrt{(b^2 + x^2)} + \frac{adx + xdx}{\sqrt{(b^2 + x^2)}}$, ſeu reducendo ad

eundem denominatorem $\frac{-ab^2dx - ax^2dx + ax^2dx + x^3dx}{x^2\sqrt{(b^2+x^2)}} = 0$, ac omnia multiplicando per $x^2\sqrt{(b^2+x^2)}$, et diuidendo per dx erit $-ab^2 - ax^2 + ax^2 + x^3 = 0$, adeoque $x^3 = ab^2$, et $x = \sqrt[3]{ab^2}$. Si ergo inter b et a, seu inter BC et AB quaerantur duae mediae geometrice proportionales, earum prima erit $= x =$ AF (Elem. 236), qua ex A in F translata habebitur punctum F, ex quo per datum punctum D ducenda est recta breuissima FE.

Scholion. Prima illa media proportionalis x, seu $\sqrt[3]{ab^2}$ facile inuenitur ope circuli, et parabolae. Describatur enim circa axem quemcunque AE parametro b parabola AD, fiatque AB $= \frac{1}{2}b$, et BC ad AB perpendicularis $= \frac{1}{2}a$: tum radio CA centro C describatur circulus secans parabolam alicubi in puncto D, erit perpendicularis DE ex puncto D ad axem AE demissa $= x$. Est enim DF $=$ DE $-$ FE $= x - \frac{1}{2}a$, et AE ex natura parabolae $= \frac{x^2}{b}$, ac BE $=$ CF $=$ AE $-$ AB $= \frac{x^2}{b} - \frac{1}{2}b$: ergo $AC^2 = CD^2 = DF^2 + CF^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 + \frac{x^4}{b^2} - x^2 + \frac{1}{4}b^2 = -ax + \frac{1}{4}a^2 + \frac{x^4}{b^2} + \frac{1}{4}b^2$; atqui idem $AC^2 = AB^2 + BC^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2$: ergo $-ax + \frac{1}{4}a^2 + \frac{x^4}{b^2} + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2$, seu tollendo vtrinque $\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2$ erit $-ax + \frac{x^4}{b^2} = 0$, et hinc $\frac{x^4}{b^2} = ax$, adeoque $x^3 = ab^2$, ac $x = \sqrt[3]{ab^2}$. Fig. 26.

120. PROBL. *In dato semicirculo triangulum maximum inscribere.* Fig. 27.

Resol. Sit diameter ſemicirculi AC $= a$, AB $= x$, cum triangulum in ſemicirculo ſit rectangulum, erit $BC^2 = AC^2 - AB^2 = a^2 - x^2$, et $BC = \surd(a^2 - x^2)$, adeoque triangulum ipſum $= \frac{1}{2} AB . BC = \frac{1}{2} x \surd(a^2 - x^2)$, quod cum debeat eſſe maximum, erit differentiando $\frac{dx}{2} \surd(a^2 - x^2) + \frac{1}{2} . \frac{1}{2} x . - 2xdx$ $(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2} \surd(a^2 - x^2) \frac{-x^2dx}{2\surd(a^2 - x^2)} = 0$, ſeu reducendo omnia ad eundem denominatorem erit $\frac{a^2dx - 2x^2dx}{2\surd(a^2 - x^2)} = 0$, ac multiplicando omnia per $2\surd(a^2 - x^2)$, et diuidendo per dx erit $a^2 - 2x^2 = 0$; et hinc $a^2 = 2x^2$, et $x^2 = \frac{1}{2} a^2$, $x = \surd \frac{1}{2} a^2$, quo valore in aequatione ſuperiore $BC = \surd(a^2 - x^2)$ ſubſtituto erit $BC = \surd(a^2 - \frac{1}{2} a^2) = \surd(\frac{2}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^2) = \surd \frac{1}{2} a^2$: hinc AB = BC, hoc eſt, triangulum iſoſceles eſt omnium maximum.

Fig. 18. 121. *PROBL. Conſtruere conum, cuius conuexa ſuperficies excedat ſuperficiem omnium conorum eidem ſphaerae inſcribendorum.*

Reſol. Sit ſphaerae diameter AB $= a$, coni quaeſiti axis AD $= x$: ducta perpendiculari DC, et chorda AC cogitetur ſemicirculus ACB circa diametrum AB reuolui, generabit ea reuolutione ſemicirculus quidem ſphaeram, triangulum vero ACD conum quaeſitum ſphaerae inſcriptum, cuius ſuperficies erit vt ſemiperipheria circuli radio CD deſcripti ducta in AC (Elem. 563), aut cum peripheriae circulorum ſint vt radii, erit vt CD . AC; atqui ex natura circuli $AC = \surd(AB.AD) = \surd ax$ (Elem. 432), $CD = \surd(AD . DB) = \surd(ax - x^2)$: ergo $CD . AC = \surd ax . \surd (ax - x^2) = \surd(a^2x^2 - ax^3)$, quod cum debeat eſſe maximum, erit differentiando $\frac{1}{2} . (2a^2xdx - 3ax^2dx) . (a^2x^2 - ax^3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2a^2xdx - 3ax^2dx}{2\surd(a^2x^2 - ax^3)} = 0$, ſeu multiplicando omnia per denominato-

rem; et diuidendo per $axdx$ erit $2a - 3x = 0$, hinc $2a = 3x$, et $x = \frac{2}{3} a$. Est adeo axis coni quaesiti AD $= \frac{2}{3}$ AB.

122. *PROBL. Inter parallelepipeda dato cubo aequalia, ac latus vnum commune habentia inuenire illud, cuius superficies, computatis basibus, sit omnium minima.*

Resol. Sit cubus datus $= a^3$, latus baseos parallelepipedi quaesiti commune $= b$, latus alterum baseos $= x$, erit basis ipsa $= bx$, per quam si diuidatur soliditas eiusdem a^3, erit $\frac{a^3}{bx}$ eiusdem altitudo (Elem. 553). Si iam latus b ducatur in latus x, idem latus in altitudinem $\frac{a^3}{bx}$, ac latus x itidem in altitudinem $\frac{a^3}{bx}$, erit $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ dimidia superficies parallelepipedi quaesiti (Elem. 549), quae cum debeat esse minima, erit differentiando $bdx - \frac{a^3dx}{x^2} = bx^2dx - a^3dx = 0$, et hinc $bx^2dx = a^3dx$, seu $bx^2 = a^3$, et $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$, quo valore in expressione altitudinis $\frac{a^3}{bx}$ substituto erit altitudo $= \frac{a^3}{b\sqrt{\frac{a^3}{b}}}$ seu tam numeratorem quam denominatorem multiplicando per $\sqrt{b}$ erit $= \frac{a^3\sqrt{b}}{b\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{a^6b}}{\sqrt{a^3b^2}} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$: quare secundum baseos latus x, et parallelepipedi altitudo debent inter se esse aequalia.

123. *Coroll.* Si simpliciter quaereretur inter omnia parallelepipeda eidem cubo aequalia illud, cuius superficies sit minima, essetque cubus ille $= a^3$, latus vnum baseos parallelepipedi quaesiti $= x$, patet ex dictis latus alterum, ac altitudinem fore $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$, ac proinde inter se aequalia: multiplicatis, vt supra, la-

teribus, et altitudine, esset dimidia parallelepipedi quaesiti superficies $= \frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3 x}$, quae cum debeat esse minima, foret differentiando $- \frac{a^3 dx}{x^2} + \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x}} = 0$, seu reducendo omnia ad eundem denominatorem, et diuidendo per dx, ac per communem denominatorem multiplicando esset $- a^3 \sqrt{a^3 x} + a^3 x^2 = 0$, vnde $a^3 x^2 = a^3 \sqrt{a^3 x}$, et $x^2 = \sqrt{a^3 x}$, ac eleuando ad quadratum $x^4 = a^3 x$, et $x^3 = a^3$, consequenter $x = a$. Vnde adparet cubum ipsum, cui parallelepipeda illa aequalia sunt, quaestioni satisfacere.

CAPVT VI.

Adplicatio eiusdem methodi ad varia problemata physica et mechanica.

Fig. 29. 124. *PROBL. Dato plano horizontali BC, et positione verticalis AB, a dato in plano BC puncto M ducere planum MN, per quod corpus a verticali AB minimo tempore descendat ad punctum M.*

Resol. Euidens est tempus descensus pendere in plano inclinato tum a spatio decurrendo; tum a velocitate corporis descendentis. Si iam planum a puncto M ad AB ductum fuerit nimis breue e. gr. MQ, minuetur quidem spatium percurrendum, at simul minuetur velocitas: sin autem planum fuerit nimis longum e. g. MA, augebitur quidem velocitas corporis descendentis, at simul crescet spatium decurrendum. Quare in aperto est dari situm quendam plani intermedium, in quo tempus descensus sit breuissimum.

Sit ergo planum quaesitum MN, sit BM $= a$, BN $= x$, erit MN $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$, et velocitas in M acquisita $= \sqrt{x}$. Iam corpus motu aequabili velocitate hac finali $\sqrt{x}$ intra idem tempus percurreret duplum spatii MN, seu $2\sqrt{(a^2 + x^2)}$, et spatia motu

tu aequabili decursa sunt in ratione composita temporis, et velocitatis; quare spatium diuisum per velocitatem exhibet tempus: erit adeo tempus descensus per planum MN $= \frac{2\sqrt{(a^2 + x^2)}}{\sqrt{x}}$, seu eleuando ad quadratum erit $= \frac{4a^2 + 4x^2}{x}$, quod cum debeat esse minimum, erit differentiando $\frac{8x^2dx - 4a^2dx - 4x^2dx}{x^2} = 0$, ac omnia multiplicando per x^2, et diuidendo per dx erit $8x^2 - 4a^2 - 4x^2 = 0$, adeoque $4x^2 = 4a^2$, seu $x = a$, id est BN = BM, et hinc angulus BMN = BNM. Debet ergo planum a dato puncto M erigi sub angulo semirecto.

125. *Coroll.* Si vero in plano verticali AB detur punctum N, a quo duci debeat planum NM, in quo corpus citissime perueniat ad planum horizontale BC; sit BN $= a$, BM $= x$, erit NM $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$, ac tempus descensus per planum NM $= \frac{2\sqrt{(a^2 + x^2)}}{\sqrt{a}}$, ac eius quadratum $= \frac{4a^2 + 4x^2}{a}$, quod cum debeat esse minimum, erit differentiando $8axdx = 0$, et hinc $x =$ BM $= 0$: ergo punctum M cadet in B, et planum celerrimi descensus erit ipsum verticale NB, vt per se euidens est.

126. *PROBL. Si lumen, aut globus perfecte elasticus e puncto M ad N via breuissima peruenire debeat facta alicubi in C a plano AB reflexione, determinare angulum reflexionis.* Fig. 30.

Resol. Ponatur punctum reflexionis esse in C, ac ducantur rectae MC et CN, item MK ad AB parallela, et ME, FC, KL, NO ad AB perpendiculares, sitque ME $= a$, NO $= b$, EO $= c$, EC $= x$, erit CO $= c - x$, MC^2 = ME^2 + EC^2 $= a^2 + x^2$, NC^2 = NO^2 + CO^2 $= b^2 + c^2 - 2cx + x^2$, et hinc MC + NC $= \sqrt{(a^2 + x^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$, quod

cum debeat esse minimum, erit differentiando $\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + \frac{xdx - cdx}{\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)}} = 0$, seu primum omnia diuidendo per dx, deinde ad eundem denominatorem reducendo, denique per communem denominatorem omnia multiplicando erit $x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} + (x-c)\sqrt{(a^2+x^2)} = 0$, adeoque $x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)} = (c-x)\sqrt{(a^2+x^2)}$, seu EC.NC=CO.MC, vnde EC : MC = CO : NC = CL : CK: est vero ME = KL, quare sumendo MC et KC pro radiis, erunt ME et KL sinus aequalium angulorum MCE et KCL: igitur etiam complementa horum angulorum, seu angulus incidentiae MCF, et angulus reflexionis KCF inter se aequales sunt. Vt ergo lumen, vel globus perfecte elasticus ex puncto M ad N via breuissima deueniat, necesse est angulum incidentiae aequari angulo reflexionis.

Fig. 31. 127. *Coroll.* Punctum ipsum reflexionis hoc pacto inuenitur. Cum supra fuerit $x : \sqrt{(a^2+x^2)} = c-x : \sqrt{(b^2+c^2-2c+x^2)}$, erit eleuando omnia ad quadratum $x^2 : a^2+x^2 = c^2 - 2cx + x^2 : b^2 + c^2 - 2cx + x^2$, adeoque $b^2x^2 + c^2x^2 - 2cx^3 + x^4 = a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + c^2x^2 - 2cx^3 + x^4$, seu $b^2x^2 = a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2$, et hinc $a^2x^2 - b^2x^2 - 2a^2cx = -a^2c^2$, adeoque $x^2 - \frac{2a^2cx}{a^2-b^2} = \frac{-a^2c^2}{a^2-b^2}$; ac quadratum complendo erit $x^2 - \frac{2a^2cx}{a^2-b^2} + \frac{a^4c^2}{a^4-2a^2b^2+b^4} = \frac{a^4c^2}{a^4-2a^2b^2+b^4} - \frac{a^2c^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b^2c^2}{a^4-2a^2b^2+b^4}$, et radicem vtrinque extrahendo erit $x - \frac{a^2c}{a^2-b^2} = \frac{\pm abc}{a^2-b^2}$; quare $x = \frac{a^2c \pm abc}{a^2-b^2}$, seu diuidendo per $a \pm b$ erit $x = \frac{ac}{a \mp b}$. Producatur ergo EM in H, ita vt sit EH = ME + NO, ac ducta HO agatur eidem ex M parallela MC, erit C punctum reflexionis.

Eſt enim HE : EO = ME : EC, ſeu $a+b:c = a$: EC; hinc EC $= \frac{ac}{a+b} = x$. Si ponatur $a = b$, erit $x = \frac{1}{2} c$.

128. *PROBL. Datis globis M et N perfecte elaſticis inuenire globum intermedium m, cuius interpoſitu globus M data celeritate incurrens maximam, quam poteſt, celeritatem communicet globo N.* Fig. 32.

Reſol. Sit celeritas globi M incurrentis = C, erit ex iis, quae nos in coſmologia demonſtrauimus, celeritas globo interpoſito m ab incurrente M communicata $= \frac{2MC}{M+m}$, atque adeo ſumma globorum $M+m$ eſt ad duplum globi incurrentis 2M, ſicut celeritas incurrentis C ad celeritatem quieſcenti m communicatam: ſit ergo celeritas, quam globus m, ſeu globus M mediante m quieſcenti N communicat $= x$, erit $m+N : 2m = \frac{2MC}{M+m} : x$, vnde $x = \frac{4M.m.C}{(M+m).(m+N)}$, quae cum debeat eſſe maxima, et ſola quantitas m ſit variabilis, erit differentiando

$$\frac{4M^2Cmdm + 4MCm^2dm + 4M^2NCdm + 4MNCmdm - 4M^2Cmdm - 8MCm^2dm - 4MCNmdm}{(Mm+m^2+MN+mN)^2}$$

$= \frac{4M^2NCdm - 4MCm^2dm}{(Mm+m^2+MN+mN)^2} = 0$, ſeu diuidendo omnia per $4MCdm$, et multiplicando per denominatorem erit $MN - m^2 = 0$, ſeu $MN = m^2$, et hinc $M : m = m : N$; id eſt, globus intermedius m debet eſſe inter globos M et N medius geometrice proportionalis, vt eius interpoſitu globus M maximam celeritatem communicet globo N.

129. *Coroll.* Quare in ſerie globorum elaſticorum decreſcentium vltimus a primo maximam acquiret celeritatem, ſi globi interpoſiti fuerint medii geometrice proportionales inter primum, et vltimum.

Fig. 33. 130. *PROBL. Determinare viam, qua lumen ex vno medio ad aliud heterogeneum, e.g. ex aere in aquam delatum a dato loco M ad datum N minimo tempore perueniat.*

Resol. Sit AB superficies media heterogenea dirimens, HI ad eam perpendicularis: ponamus viam quaesitam esse MC + CN; ducantur perpendicula ME, NO, NI, sitque ME $= a$, EO $= b$, NO $= c$, EC $= x$, erit CO $= b - x$, MC $= \surd\,(ME^2 + EC^2) = \surd\,(a^2 + x^2)$, NC $= \surd\,(NO^2 + CO^2) = \surd\,(c^2 + b^2 - 2bx + x^2)$. Ponamus iam, id quod vero simillimum est, velocitates luminis in hisce mediis V et v esse in ratione reciproca resistentiae mediorum R et r, seu V : $v = r$: R, cum in motu aequabili tempora sint directe vt spatia, et reciproce vt velocitates, erit tempus per MC + NC $= \frac{\surd\,(a^2 + x^2)}{r} + \frac{\surd\,(c^2 + b^2 - 2bx + x^2)}{R}$, quod cum debeat esse minimum, erit differentiando $\frac{xdx}{r\surd\,(a^2 + x^2)} - \frac{bdx + xdx}{R\surd\,(c^2 + b^2 - 2bx + x^2)} = 0$, hinc diuidendo omnia per dx, et transponendo erit $\frac{x}{r\surd\,(a^2 + x^2)} = \frac{b - x}{R\surd\,(c^2 + b^2 - 2bx + x^2)}$, seu R. $x\,\surd\,(c^2 + b^2 - 2bx + x^2) = (rb - rx)\,\surd\,(a^2 + x^2)$; vnde $\surd\,(a^2 + x^2) : \surd\,(c^2 + b^2 - 2bx + x^2) = R.\,x = r\,(b - x)$; id est, MC : NC = R. EC : r. CO.

131. *Coroll. 1.* Si sit MC = NC, erit R. EC $= r$. CO, adeoque EC : CO $= r$: R, hoc est, sumtis MC, et NC pro radiis, erunt resistentiae mediorum reciproce vt sinus angulorum incidentiae, et refractionis.

132. *Coroll. 2.* Cumque eorundem mediorum resistentiae sub quauis radiorum incidentium obliquitate constantes sint, etiam sinus dictorum angulorum in ratione constanti sunt.

133. *PROBL. Dato situ monetae C in plano BD, inuenire in recta verticali AB situm candelae ardentis, vt ab eadem moneta maxime collustretur.* Fig. 34.

Resol. Si in recta AB candela nimium deprimatur, vel nimium attollatur, decrescit monetae collustratio; in primo quidem casu propter radiorum incidentium obliquitatem, in secundo propter flammae radiantis elongationem: quare euidens est dari in recta AB locum quemdam intermedium, e quo candela monetam maxime illuminet, quem proinde quaerimus.

Igitur centro C radio CB describatur arcus BMQ, ponaturque interea locus candelae esse vbicunque in A, ac sit AB $= x$: tum ducatur recta AC, et perpendicularis MN, quae erit sinus anguli ACB. Sit porro BC $=$ MC $= a$, erit AC $= \sqrt{(BC^2 + AB^2)} = \sqrt{(a^2 + x^2)}$, et ob triangula ACB, MCN similia AC : AB $=$ MC : MN, seu $\sqrt{(a^2 + x^2)} : x = a :$ MN, vnde MN $= \frac{ax}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$. Sit porro vis absoluta luminis monetam perpendiculariter illustrantis $= 1$, erit haec vis ad vim luminis ex eadem distantia oblique incidentis, vt sinus totus ad sinum anguli obliquitatis, seu vt MC : MN $= a : \frac{ax}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} = 1 : \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$. Praeterea sub eadem incidentiae obliquitate ACB erit vis luminis ex M dimanantis ad vim eiusdem ex A venientis in ratione reciproca duplicata distantiarum, seu vt $\frac{1}{MC^2} : \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^2 + x^2}$, seu tam antecedens, quam consequens per $\frac{a^2 x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$ multiplicando erit vt $\frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} : \frac{a^2 x}{(a^2 + x^2)\sqrt{(a^2 + x^2)}}$: cum ergo vis $\frac{a^2 x}{(a^2 + x^2)\sqrt{(a^2 + x^2)}}$ debeat esse maxima, fiat $\sqrt{(a^2 + x^2)} = y$,

erit $y^2 = a^2 x^2$, hinc $x = \sqrt{(y^2 - a^2)}$, et $\frac{a^2 x}{(a^2+x^2)\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{a\sqrt{(y^2-a^2)}}{y^3}$ ac proinde differentiando $\frac{\frac{1}{2}a \cdot y^3 \cdot 2ydy\,(y^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{y^6} - \frac{3ay^2dy\sqrt{(y^2-a^2)}}{y^6} = \frac{ay^4dy}{y^6\sqrt{(y^2-a^2)}} - \frac{3ay^2dy\sqrt{(y^2-a^2)}}{y^6} = 0$, ac multiplicando omnia per $y^6\sqrt{(y^2-a^2)}$, et diuidendo per dy erit $ay^4 - 3ay^4 + 3a^3y^2 = 0$, id est $3a^2 = 2y^2$, ac pro y^2 reponendo $a^2 + x^2$ erit $3a^2 = 2a^2 + 2x^2$; hinc $a^2 = 2x^2$: quare vt locus candelae habeatur, debet in C fieri angulus semirectus ACB, ac ex M demitti ad BA perpendiculum ML, erit L locus quaesitus. Erit enim $MC^2 = MN^2 + NC^2 = 2MN^2 = 2LB^2$, seu $a^2 = 2LB^2 = 2x^2$: vnde $LB = x$.

Fig. 35. 134. *PROBL. Determinare angulum, sub quo amplitudo iactus horizontalis corporum oblique proiectorum sit omnium maxima.*

Resol. Ex iis, quae de corporibus oblique proiectis tradi solent in mechanica, perspicuum est horizontales iactuum amplitudines BD et BE sub angulis directionum GBD, HBD esse vt sinus angulorum duplorum GCB, HCB, seu vt ordinatas circuli FG et CH; atqui ordinata maxima in circulo est CH in centro adplicata (99): ergo amplitudo iactus est omnium maxima sub angulo HBD, qui est 45° (Elem. 340).

Fig. 36. 135. *PROBL. Dato angulo eleuationis tormenti CAF, et data vi pulueris pyrii determinare maximam altitudinem, ad quam globus oblique proiectus ascendit.*

Resol. Dato angulo eleuationis CAF, ac data vi pulueris pyrii innotescit distantia AC, ad quam globus pertingit; adeoque facta trianguli rectanguli ACF resolutione innotescit etiam linea lapsus FC. Sit iam $AC = a$, $FC = b$, erit $AF = \sqrt{(AC^2 + FC^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; sit $AD = x$, erit in triangulis ACF,

ADI similibus AC : FC = AD : DI, seu $a : b = x : DI$, vnde $DI = \frac{bx}{a}$: ergo $AI^2 = AD^2 + DI^2 = x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{a^2}$, et $AI = \frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}$. Fiat recta AQ parallela, et aequalis FC, compleaturque parallelogrammum AQCF, ac ducatur PM parallela rectae AI, erit ex natura parabolae $QC^2 : PM^2 = AQ : AP$ (Elem. 680), = FC : IM, seu $a^2 + b^2 : \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{a^2} = b : IM$, seu primae rationis terminos multiplicando per a^2 et diuidendo per $a^2 + b^2$ erit $a^2 : x^2 = b : IM$, et hinc $IM = \frac{bx^2}{a^2}$; quare DM $= DI - IM = \frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{a^2} = \frac{abx - bx^2}{a^2}$, quod cum debeat esse maximum, erit differentiando $\frac{abdx - 2bxdx}{a^2} = 0$, et multiplicando omnia per a^2, ac diuidendo per bdx erit $a - 2x = 0$, adeoque $a = 2x$, et $x = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AC$. Si ergo fiat $AD = \frac{1}{2}AC$, perpendiculum erectum DM erit altitudo quaesita.

136. *Coroll.* Valor maximae altitudinis DM hoc pacto eruitur. Cum supra fuerit $DM = \frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{a^2}$, loco x substituatur valor inuentus $\frac{1}{2}a$, erit $DM = \frac{ab}{2a} - \frac{a^2b}{4a^2} = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b = \frac{2}{4}b - \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}b$ $= \frac{1}{4}FC = \frac{1}{4}AQ$.

137. PROBL. *Data grauitate specifica fluidi e. g. aquae inuenire grauitatem specificam solidi leuioris, vt vis illud parte sui demersum extra situm naturalem detinens sit omnium maxima.* Fig 37.

Resol. Sit cylinder homogeneus AB aqua specifice leuior parte sui CB infra libellam aquae DE oblique demersus: vis cylindrum in situ hoc obliquo detinens debet imprimis vincere pondus partis eminentis AC; tum vim, qua partem demersam CB aqua extrudere nititur. Si iam solidum ab aqua multum grauitate

discrepet, magna quidem erit vis aquae partem demersam CB extrudere nitentis, at paruum erit pondus partis eminentis AC: si vero grauitatum differentia exigua sit, magnum quidem erit pondus partis eminentis AC, at paruus erit nisus aquae partem demersam CB extrudere conantis. Quare vt summa ex pondere partis eminentis AC, et actione aquae partem demersam CB eleuare nitentis, cui summae vis sustentans aequari debet, sit maxima, necesse est inter grauitates specificas aquae et solidi determinatam intercedere rationem, quam hic inuestigamus.

Sit grauitas specifica aquae $= a$, solidi $= x$, volumen solidi $= b$, erit grauitas eiusdem absoluta $= bx$; atqui pondus absolutum solidi aequatur ponderi aquae parti demersae respondentis, et si pondera absoluta aequalia sint, grauitates specificae sunt reciproce vt volumina; quare erit $a : x = b : \frac{bx}{a}$, seu $\frac{bx}{a}$ est volumen aquae parti demersae BC respondentis, adeoque est volumen etiam ipsius partis demersae BC: ergo volumen partis eminentis AC erit $b - \frac{bx}{a} = \frac{ab - bx}{a}$, ac pondus eiusdem absolutum $= \frac{abx - bx^2}{a}$. Porro vis aquae partem demersam BC eleuare conantis est excessus grauitatis aquae correspondentis supra grauitatem partis demersae, seu est $\frac{abx}{a} - \frac{bx^2}{a} = \frac{abx - bx^2}{a}$: ergo summa ex pondere partis eminentis AC, et ex nisu aquae partem demersam BC extrudere conantis, seu vis solidum in situ obliquo sustentans est $= \frac{2abx - 2bx^2}{a}$, quae cum maxima esse debeat, erit differentiando $\frac{2abdx - 4bxdx}{a} = 0$, ac omnia per a multiplicando, et per bdx diuidendo erit $2a - 4x = 0$; vnde $2a = 4x$, seu $x = \frac{1}{2}a$. Quare tunc requiritur ad solidum in obliquo

quo

quo situ detinendum vis maxima, quando grauitas eiusdem specifica dimidia est grauitatis specificae fluidi.

138. PROBL. *Si data potentia ope vectis ABC moueat pondus, sintque vires celeritatibus proportionales, determinare rationem potentiae ad pondus, vt effectus eiusdem potentiae sit maximus.* Fig. 88.

Resol. Sit data potentia $= b$, eiusdem in A adplicatae distantia ab hypomochlio C, seu longitudo vectis AC $= l$, distantia ponderis BC ab eodem hypomochlio $= a$.

1) Quaeratur pondus p, quod in distantia a cum potentia b in A adplicata esset in aequilibrio, inferendo $a : l = b : p$, erit $ap = bl$.

2) Vt iam motus ponderis sequi possit, pondus p potentiam aequilibrans debet parte sui aliqua x multari: erit adeo pondus quaesitum $= p - x$, ac eius momentum $= ap - ax$, quod subtractum a momento potentiae datae $bl = ap$, relinquit ax, excessum scilicet potentiae supra pondus, cuius solum ratio hic habenda est.

3) Quaeratur excessui huic ax respondens celeritas, quae cum per tempus detur, quaerendum est imprimis tempus hoc pacto. In praesente hypothesi vires sunt vt celeritates, adeoque reciproce vt tempora: si ergo tempus vis bl seu vis ap sit $= 1$, erit $ax : ap = 1 : \frac{ap}{ax}$: porro celeritates sunt reciproce vt tempora, erit igitur vis ax celeritas $= \frac{ax}{ap}$.

4) Quaeratur denique celeritas ponderis $p - x$ inferendo $l : a = \frac{ax}{ap} : \frac{a^2x}{alp}$, quae si ducatur in ipsum pondus $p - x$, erit $\frac{pa^2x - a^2x^2}{alp}$ momentum ponderis $p - x$, seu effectus datae potentiae b, qui cum debeat esse maximus, erit differentiando

$\frac{pa^2dx - 2a^2xdx}{alp} = 0$, feu multiplicando omnia per alp, et diuidendo per a^2dx, erit $p - 2x = 0$, et hinc $x = \frac{1}{2}p$, adeoque $p - x = p - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$; id eſt, vt effectus potentiae ſit maximus, debet pondus $p - x$ eſſe ſubduplum eius, quod in eodem loco applicatum cum data potentia in aequilibrio eſſet.

Fig. 39. 139. PROBL. *Determinare longitudinem plani AC, per quod breuiſſimo tempore eleuetur pondus datum P ad altitudinem AB a dato pondere R libere deſcendente.*

Reſol. Euidens eſt tempus aſcenſus ponderis per altitudinem BA pendere tum a vi relatiua ponderis R eum aſcenſum procurante, tum a longitudine ſpatii percurrendi CA. Si plani AC longitudo nimis parua fuerit, parua quidem erit via ponderi attollendo emetienda, ſed ſimul parua erit vis relatiua ponderis R eum aſcenſum efficiens: ſi plani longitudo nimia fuerit, magna quidem erit vis reſpectiua ponderis R, at ſimul magna erit ponderi P via percurrenda: quare vt ea eleuatio minimo, quam fieri poteſt, tempore peragatur, patet mediam quamdam eſſe debere plani inclinati AC longitudinem, quam nos hoc loco quaerimus.

Sit longitudo plani quaeſiti AC $= x$, ducaturque aliquod planum AD eiusdem altitudinis AB, cuius longitudo ſit $= a$, cui ſi incumberet pondus P eſſet cum R in aequilibrio; erit ex iis, quae in phyſica docuimus, R : P = AB : AD. Sit porro grauitas comparatiua, qua per planum quaeſitum AC pondus P deſcendere nititur = G, erit P : G = AC : AB : ergo ex aequo perturbato R : G = AC : AD (Elem. 207): igitur R — G, ſeu vis, qua pondus R attollit pondus P, eſt ad R, ſicut AC — AD : AC, ſeu ſi fiat AE = AC, erit R — G : R = ED : AC, et $R - G = \frac{R \cdot ED}{AC}$.

Iam ſpatia motu vniformiter accelerato decurſa ſunt in ratione compoſita virium, et quadratorum temporum, vt diximus in phyſica, ſeu $S : s = VT^2 : vt^2$: ergo $Svt^2 = sVT^2$, adeoque $T^2 : t^2 = Sv : sV$; quare quadratum temporis, quo pondus P planum AC percurrit, ſeu ad altitudinem BA eleuatur, eſt directe vt ſpatium AC, et reciproce vt vis attollens $R - G = \frac{R . ED}{AC}$, quae omiſſa conſtante R eſt vt $\frac{ED}{AC}$: ergo quadratum temporis per planum AC eſt vt $\frac{AC^2}{ED} = \frac{x^2}{x - a}$, quod cum debeat eſſe minimum, erit differentiando $\frac{2x^2dx - 2axdx - x^2dx}{(x - a)^2} = 0$, ſeu multiplicando omnia per denominatorem, et diuidendo per xdx erit $2x - 2a - x = 0$, vnde $x = 2a$. Adparet ergo imprimis quaerendum eſſe planum AD, cui incumbens pondus P cum R eſſet in aequilibrio: deinde faciendum AC = 2AD, vt obtineatur planum quaeſitum. Planum autem AD inuenitur hac proportione R : P = AB : AD, vt dictum eſt in phyſica.

140. *PROBL. Determinare angulum ABC, quem crura anchorae BC et BD formare debent cum axe AB, vt in maris fundum validiſſime immergantur.* Fig. 40.

Reſol. Dum axis anchorae AB ſitu ad maris fundum MN parallelo trahitur, ſi angulus ABC rectus fuerit, crus BC erit ad fundum perpendicularis, ac proinde tota vis impenditur ad trahendam anchoram directione BA, non item ad morſum cum fundo procurandum: ſi vero idem angulus nimium acutus fuerit, crus anchorae BC radit duntaxat, et ſulcat fundum, nec in eo multum demergitur. Quare in aperto eſt haberi angulum quempiam inter rectum, et nimium acutos intermedium, ſub quo cruris BC in fundum MN demerſio ſit maxima, quem proinde hoc loco quaerimus.

Ponamus angulum quaesitum esse ABC, sit vis anchoram directione BA trahens = BG = a, aget haec oblique in crus BC demergendum; quare resoluatur in duas, nempe in BE et EG, quarum sola prior BE nitetur crus BC in fundum demergere, quae ipsa cum respectu fundi MN oblique agat, fiat FC = BE, ac resoluatur in vires FH, et HC, quarum sola prior efficit demersionem.

Sit iam GE = x, erit BE = FC = $\sqrt{(BG^2 - GE^2)}$ = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$; ac ob triangula BGE, FCH similia erit BG : GE = FC seu BE : FH, id est $a : x = \sqrt{(a^2 - x^2)}$: FH, vnde FH = $\frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$, quod cum debeat esse maximum, erit differentiando $\frac{dx\sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{1}{2}x \cdot 2xdx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a} = \frac{dx\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} - \frac{x^2dx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0$, seu reducendo ad eundem denominatorem erit $\frac{a^2dx - 2x^2dx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0$, ac per denominatorem omnia multiplicando, et per dx diuidendo erit $a^2 - 2x^2 = 0$, seu $a^2 = 2x^2 = GE^2 + BE^2$: quare GE = BE; adeoque angulus ABC debet semirectus esse.

Fig. 41. 141. *Coroll.* Si pondus trabis AB ad AC normaliter adplicatae ope subiecti fulcri MN sustentandum sit, vt fulcrum ponderi maxime resistat angulum AMN semirectum esse debere eodem plane pacto euincitur. Exprimat enim MN vim fulcri absolutam, quoniam in pondus trabis AB oblique agit, resoluetur in vires AN et DN, quarum sola postrema sustentabit trabem AB. Iam vt vis DN momentum obtineatur, debet ea duci in distantiam AN ab hypomochlio A, eritque id momentum = AN . DN. Sit ergo MN = a, AM = DN = x, erit AN = $\sqrt{(MN^2 - AM^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, et hinc AN . DN = $x\sqrt{}$

$(a^2 - x^2)$, quod cum debeat esse maximum; erit differentiando $dx\sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{1}{2}x \,.\, 2xdx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = dx\sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0$, ac reducendo ad eundem denominatorem erit $\frac{a^2dx - 2x^2dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0$, et multiplicando omnia per communem denominatorem, ac per dx diuidendo erit $a^2 - 2x^2 = 0$, et $a^2 = 2x^2 = AM^2 + AN^2$, vnde $AM = AN$, adeoque angulus AMN semirectus est.

142. PROBL. *Determinare angulum ABK, quem alae molendini vento circumagendae cum axe AB efficere debent, vt vis venti easdem conuertentis sit maxima.* Fig. 42.

Resol. Constructio id genus molendinorum eiusmodi esse solet, vt axis AB semper iaceat iuxta venti directionem, adeoque alae eo modo inclinentur ad venti directionem, quo ad ipsum axem. Sint ergo DK et FI directiones venti axi AB parallelae, sit GHIK ala molendini circa axem AB conuertenda, ac recta LB exhibeat venti in alam incurrentis celeritatem, demittaturque KT ad FI perpendicularis. Perspicuum est intra idem tempus non posse plus fluidi aerei impingere in planum obliquum GHIK, cuius latitudo est KI, quam impingeret in planum perpendiculare aeque altum, cuius latitudo sit KT. Repraesentet ergo KT quantitatem aeris alam simul ferientis, erit massa eiusdem dato tempore in alam incurrentis = KT . LB. His positis

1) Cum directio aeris contra alam obliqua sit, non agit in illam tota sua celeritate LB, sed demissa ad alam perpendicularis LN designabit celeritatem comparatiuam, qua aer in B oblique agit. Quia vero ala moueri nequit, nisi circa axem AB, non insumitur tota celeritas LN in eius conuersionem, sed facta in

quas LO et ON resolutione, sola pars ON impenditur in eum effectum: ac proinde vis venti in alam conuertendam impensa, quae obtinetur ducendo massam in celeritatem, est KT.LB.ON.

2) Porro cum alae GHIK homogeneae centrum grauitatis idem sit cum centro magnitudinis C, vis, quam ventus eidem conuertendae adhibet, concipi potest tanquam adplicata in C, et recta BC spectari tanquam vectis, aut tanquam radius axis in peritrochio circa centrum B reuolubilis: ergo vis, seu momentum venti habita ratione distantiae CB ab hypomochlio B est $= KT . LB . ON . BC$.

3) Sit iam $LB = c$, $KI = a$, $BC = b$, $IT = x$, erit $BK = \frac{1}{2} KI = \frac{1}{2}a$; et quia ob triangula KIT, KBR similia $KB : KI = BR : IT$, et $KB = \frac{1}{2} KI$, erit etiam $BR = \frac{1}{2} IT = \frac{1}{2}x$; item $KT = \sqrt{(KI^2 - IT^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Praeterea triangula KTI, LNB similia sunt ob angulos ad T et N rectos, ac ob $TIK = LBN$; quare $KI : KT = LB : LN$, seu $a : \sqrt{(a^2 - x^2)} = c : LN$, vnde $LN = \frac{c\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$. Denique cum ex dictis similia sint triangula KTI, LNB, et horum primo simile sit triangulum KRB, secundo simile sit triangulum LNO (Elem. 431), et triangula KRB, LNO similia sunt, hinc $KB : RB = LN : ON$, seu $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}x = \frac{c\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} : ON$, ac proinde $ON = \frac{cx}{a^2} \sqrt{(a^2 - x^2)}$.

4) Demum in expressione KT.LB.ON.BC substituendo valores hactenus inuentos, erit vis venti alam conuertere nitentis $= \sqrt{(a^2 - x^2)} . c . \frac{cx}{a^2} \sqrt{(a^2 - x^2)} . b = bc^2x - \frac{bc^2x^3}{a^2}$, quae cum debeat esse maxima, erit differentiando $bc^2dx - \frac{3bc^2x^2dx}{a^2} = \frac{a^2bc^2dx - 3bc^2x^2dx}{a^2} = 0$, ac diuidendo omnia per bc^2dx, et per a^2

multiplicando erit $a^2 - 3x^2 = 0$, adeoque $a^2 = 3x^2$, et $x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$. Si iam KI seu a sumatur pro sinu toto, erit IT $= x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$ sinus anguli TKI. Sit ergo sinus totus $a = 10000000$, erit $a^2 = 100000000000000$, et $\frac{1}{3}a^2 = 33333333333333$, cuius radix quadrata, seu $\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x = 5773502$, quam proxime, cui in tabulis sinuum proxime respondent 35°, 16′: est adeo angulus TKI = 35°, 16′, et hinc eius complementum TIK = ABK = 54°, 44′. Maxima ergo erit venti vis, si incurrat in alam sub angulo 54°, 44′.

143. *PROBL. Determinare angulum CBL, quem gubernaculum BC efficere debet cum axe nauis AB, vt vis gubernaculi ad nauem conuertendam sit maxima.* Fig. 43.

Resol. Sit directio nauis secundum axem AB, aut secundum fluminis cursum MG axi nauis AB parallelum: exprimat recta EG celeritatem fluminis contra gubernaculum BC, quae cum oblique adplicata sit, resoluatur in duas ED et EF = DG, quarum sola prior aget in gubernaculum conuertendum. Completo parallelogrammo EFGD producatur FG in K, ita vt fiat GK = FG, ac ex puncto G ducatur GH ad MG perpendicularis, et ex puncto K ducatur KH parallela axi nauis AB, aut directioni fluminis MG, compleaturque parallelogrammum GIKH, et sit EG $= a$, ED = FG = GK $= x$, erit FE = GD $= \sqrt{(EG^2 - ED^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Iam vires fluminis diuersis directionibus in idem gubernaculum incurrentis sunt in ratione composita massarum, et celeritatum; seu cum eo plus massae intra idem tempus incurrat, quo maior est fluminis celeritas, sunt vires vt quadrata celeritatum, vel sinuum angulorum inclinationis. Si ergo EG sumatur pro sinu toto, erit vis fluminis directe incurrentis, ad vim eiusdem obli-

que incurrentis, vt quadratum finus totius ad quadratum finus anguli inclinationis, feu $a^2 : x^2 = a : \frac{ax^2}{a^2}$; quare $\frac{ax^2}{a^2} = \frac{x^2}{a}$ eft vis fluminis gubernaculum oblique ferientis fub angulo EGD = CBL.

Porro ob triangula EDG, HGK fimilia eft EG : GK = GD : GH, feu $a : \frac{x^2}{a} = \sqrt{(a^2 - x^2)} : GH$, vnde $GH = \frac{x^2\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a^2}$, quae eft vis exerenda in nauim conuertendam; non enim tota vis ED = FG = GK impenditur in eum finem, fed fola pars GH axi nauis AB perpendicularis, parte altera GI eidem axi parallela nihil ad eam conuerfionem conducente. Cum ergo vis GH debeat effe maxima, erit differentiando

$$\frac{2a^2xdx\sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{1}{2}a^2x^2 \cdot 2xdx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^4} = \frac{2xdx\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a^2} - \frac{x^3dx}{a^2\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0,$$

feu reducendo ad eundem denominatorem erit $\frac{2a^2xdx - 3x^3dx}{a^2\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0$, ac omnia multiplicando per communem denominatorem, et diuidendo per xdx erit $2a^2 - 3x^2 = 0$, vnde $2a^2 = 3x^2$, et $x^2 = \frac{2}{3}a^2 = ED^2$: ergo $GD^2 = \frac{1}{3}a^2$, $GD = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$. Quare, vt in praecedente problemate, angulus GED, cuius finus eft GD, eft = 35°, 16′; ac proinde eius complementum EGD = CBL = 54°, 44′.

144. *Coroll.* Simili calculo euincitur vela nauium maximum impulfum recipere, fi vento fub angulo 54°, 44′ obuertantur, dum fcilicet ventus directioni nauis perpendicularis eft. Angulus tamen hic initio duntaxat motus eft maxime idoneus: poftquam enim nauis, aut machina quaeuis alia celeritatem aliquam concepit, angulum augere neceffe eft. E. g. Si machinae celeritas fubtripla fuerit celeritatis fluidi impellentis, angulus incli-

na-

nationis maxime opportunus erit 63°, 26′: si celeritas machinae aequet fluidi celeritatem, idem angulus debebit esse 74°, 19′. Conf. Mac-Laur. Tract. de flux. tom. 2. §. 907 et seq.

Scholion. Praeter innumera alia problemata, quorum solutio eadem, quam in superioribus adhibuimus, methodo obtineri potest, huc pertinet et illud, quo quaeritur inclinatio tribuenda nauibus pontem volantem sustinentibus, vt pons fluuium sine velis et remis celerrime traiiciat, quod in traiectu Danubii passim vsurpari videmus in Vngaria. Sit enim funis MC, cuius *Fig.* 44. vnum extremum M alligatum sit nauiculae in medio flumine ope anchorae consistentis, alterum C adnexum sit ponti mobili de vna ripa in alteram traiiciendo, ac insistenti nauibus, quarum vna sit ACBF. Recta CD axi nauis AB perpendicularis exhibeat vim aquae oblique impellentis, resoluaturque in duas, nempe in CE et CF = ED; harum posterior CF a fune MC penitus elidetur, ac sola CE ad directionem funis, seu fluminis MC perpendicularis propellet pontem ad ripam, quae vt maxima sit, deprehendetur, vt supra, angulum ECD = ACM oportere esse 35°, 16′, adeoque proram nauis A ope gubernaculi sic esse cursui fluminis obuertendam, vt axis eiusdem AB cum fluminis directione angulum dictum efficiat.

SECTIO TERTIA.

De secundis functionum variabilium Differentialibus, deque multiplici eorundem vsu.

CAPVT I.

De inueniendis Differentialibus secundis.

145. PROBL. *Inuenire differentialia functionum differentialium, seu differentialia secunda quantitatum finitarum variabilium.*

Resol. Data differentialia primi ordinis ſpectentur tanquam finitae quantitates; tum ex adiunctis ſedulo diſpiciatur, quaenam earum ſint conſtantes, quaenam variabiles: denique fiat earum differentiatio iuxta easdem regulas, quas de differentiandis quantitatibus finitis hactenus tradidimus, illud probe animaduertendo, quod tametſi aliquod differentiale primum e. g. dx ſupponatur eſſe conſtans, non tamen propterea eiusdem integralis x conſtans eſt, ſecus non habuiſſet differentiale primum dx.

EXEMPLA.

I $d\,(x^2 dx dy) = 2x dx^2 dy + x^2 dy ddx + x^2 dx ddy.$

II $d\,(ydx - xdy) = dxdy + yddx - dxdy - xddy = yddx - xddy.$

III $d\,\left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{dxdy^2 + ydxddy - ydyddx}{dx^2}.$

IV $d\,(mx^{m-1}dx) = (m-1).m.(x^{m-2}).dx.dx + mx^{m-1}ddx$
$= (m^2 - m)x^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}ddx.$

V $d\left(\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{du}\right) = \frac{dydu\sqrt{(dx^2+dy^2+ydu.d\sqrt{(dx^2+dy^2)} - ydduv\sqrt{(dx^2+dy^2)}}}{du^2}$

$= \frac{dydu\sqrt{(dx^2+dy^2)} + ydu.\frac{1}{2}(2dxddx + 2dyddy).(dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}} - yddu\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{du^2}$

$= \frac{dydu\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{du^2} + \frac{ydudxddx + ydudyddy}{du^2\sqrt{(dx^2+dy^2)}} - \frac{yddu\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{du^2}$

$= \frac{dx^2dydu + dy^3du + ydudxddx + ydudyddy - ydx^2ddu - ydy^2ddu.}{du^2\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$

VI $d\left(\frac{ydy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}\right) = \frac{(dy^2+yddy)\sqrt{(dx^2+dy^2)} - ydy.d\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx^2+dy^2}$

$= \frac{dy^2+yddy)\sqrt{(dx^2+dy^2)} - ydy.\frac{1}{2}(2dxddx + 2dyddy).(dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^2+dy^2}$

$$= \frac{(dy^2 + yddy)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx^2+dy^2} - \frac{ydydxddx - ydy^2ddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$$

$$= \frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy - ydydxddx}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$

VII $d\left(\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right) = \frac{(dx^2+xddx+dy^2+yddy)\sqrt{(x^2+y^2)} - (xdx+ydy)d\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}$

$$= \frac{(dx^2+xddx+dy^2+yddy)\sqrt{(x^2+y^2)} - (xdx-ydy.\tfrac{1}{2}(2xdx+2ydy).(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{(dx^2+xddx+dy^2+yddy)\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} - \frac{(xdx-ydy).(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$= \frac{x^2ddx + x^2dy^2 + x^2yddy + y^2dx^2 + xy^2ddx + y^3ddy - 2xydxdy.}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

Scholion. Si in his, aliisque exemplis differentiale aliquod pro constanti habeatur, omittantur omnes termini, in quibus occurrit eiusdem differentialis differentiale. E. g. Si in exemplo quinto ponatur esse constans du, vel dx, vel dy, in primo casu omitti debent omnes termini, in quibus reperitur ddu; in secundo omnes, in quibus reperitur ddx; in tertio omnes, in quibus reperitur ddy. Ceterum minor erit in operando molestia, si statim initio operationis quantitates differentiales, quae constantes esse ponuntur, vt constantes tractentur, id quod in sequentibus semper faciemus. Sic in exemplo sexto si dx^2 ponatur esse quantitas constans, erit quaesitum differentiale $= \frac{(dy^2+yddy)\sqrt{(dx^2-dy^2)}}{dx^2+dy^2}$ $- \frac{ydy^2ddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{dx^2dy^2+dy^4+ydx^2ddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, quo demum recidit etiam differentiale supra in exemplo citato inuentum, si in eodem omittatur terminus $- ydydxddx$.

CAPVT II.

De curuarum Flexibus, et Regressibus.

Fig. 45.46. 146. Si curua quaepiam ADN eiusmodi sit, vt axi AC, vel puncto cuipiam C partim concauitatem, partim conuexitatem obuertat, punctum D separans partem concauam a conuexa *punctum flexus contrarii* dicitur. Sin autem curua eiusmodi sit, vt a *Fig.* 47. puncto quopiam A aliquamdiu recedat e. g. vsque ad punctum D, tum regrediatur iterum versus L vel versus N, punctum illud D, in quo ea regressio sit, *punctum regressus* adpellatur.

Scholion. Curuas huiusmodi non posse esse secundi ordinis, quarum scilicet aequatio sit secundi gradus, facile quisque videt. Tangens enim ad punctum flexus contrarii, vel ad punctum regressus ducta et tangit, et secat curuam, ac proinde in puncto illo tres minimum ordinatae congruunt, et hinc aequatio ad huiuscemodi curuam tres minimum habere radices, hoc est, minimum tertii gradus esse debet. Possunt autem hae curuae considerari 1) relate ad axem quempiam, ad quem ordinatae inter se parallelae adplicantur: 2) relate ad punctum aliquod, seu focum, in quo ordinatae concurrunt. Nos hic eas vtroque modo spectabimus.

Fig. 45. 147. Si curua ADN versus axem AC primum concaua, deinde conuexa sit, sumatur abscissa quaecunque AP $= x$, eique respondens ordinata PM $= y$, ac ducatur tangens TM: crescente abscissa AP crescet recta AT tamdiu, donec punctum P abeat in C, et punctum T in t. Si porro abscissa pergat crescere, abeatque e. g. in AH, tangens tD abibit in GK, incipietque At denuo decrescere: est ergo AT, seu $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$ (39) respondens puncto flexus contrarii D quoddam maximum, et

hinc eius differentiale aequatur nihilo, vel infinito, hoc est, si dx ponatur esse constans, erit $d\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right) = \frac{dxdy^2 - dxdy^2 - ydxddy - dxdyddy}{dy^2}$ $= 0$, vel $= \infty$, seu negligendo terminum vltimum respectu ceterorum euanescentem, ac omnia per dy^2 multiplicando erit $-ydxddy = 0$ vel ∞, et diuidendo per $-ydx$ erit $ddy = 0$ vel $= \infty$.

148. Si curua ADN versus axem AC primum conuexa, deinde concaua fuerit, crescente abscissa AP crescet recta AT tamdiu, donec punctum P cadat in C, et punctum T abeat in t. Si porro pergat abscissa crescere, abeatque e.g. in AH, tangens tD abibit in GK, incipietque At denuo decrescere: ergo $AT = AP - PT = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{xdy - ydx}{dy}$ erit quoddam maximum, dum respondet puncto flexus contrarii D, et hinc differentiale eiusdem aequatur nihilo, vel infinito, seu $d\left(\frac{xdy - ydx}{dy}\right) = \frac{dxdy^2 - dxdy^2 + xdyddy - xdyddy + ydxddy}{dy^2} = 0$, vel $= \infty$, posito scilicet dx constante; adeoque multiplicando omnia per dy^2 erit $ydxddy = 0$, vel $= \infty$, adeoque $ddy = 0$, vel $= \infty$ vt supra. *Fig. 46.*

149. *Coroll.* Si posita origine abscissarum in puncto C, punctum flexus contrarii haberetur in M, constaret quidem tunc CT ex abscissa CP, et subtangente PT, seu esset $= CP + PT$; sed quia tunc PT est $= -\frac{ydx}{dy}$, esset CT etiam tunc $= x - \frac{ydx}{dy}$ $= \frac{xdy - ydx}{dy}$: hinc in nullo vnquam casu potest fieri CT, seu in superioribus figuris $AT = x + \frac{ydx}{dy} = \frac{xdy + ydx}{dy}$; quod quidem si fieri posset, esset posito dx constante $d\left(\frac{xdy + ydx}{dy}\right) = \frac{2dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$ $= 0$, vel $= \infty$, vnde deduci non posset ddy esse $= 0$ vel $= \infty$. *Fig. 11.*

Fig. 45. 46. *Scholion.* In puncto flexus contrarii D debere ddy esse $= 0$, vel $= \infty$ etiam hoc pacto euincitur. Ductis ordinatis PM et pm sibi infinite propinquis, si curua initio concaua, deinde conuexa sit, sumta $MR = dx$ pro constante, euidens est differentiale $mR = dy$ continenter decrescere vsque ad punctum flexus contrarii D, ac post illud rursus crescere, esse proinde in puncto D quoddam minimum; adeoque si concipiatur curua aliqua, cuius ordinatae sint omnes mR seu dy, fore $d.(dy) = 0$, vel $= \infty$. Idem eodem modo adparet, si D sit punctum regressus. Si vero curua initio conuexa, deinde concaua fuerit, eodem plane modo intelligitur dy in puncto D fore quoddam maximum, ac proinde rursus fore $ddy = 0$, vel $= \infty$.

150. *LEMMA. Quantitas continenter decrescens nequit e positiua reddi negatiua, quin transeat per nihilum: et quantitas continenter crescens nequit e positiua reddi negatiua, quin transeat per infinitum.*

Fig. 48.

Demonstr. 1) Cogitetur recta AD continenter decrescere, ac abire in negatiuam Ad: euidens est debere illam acquirere successiue omnes magnitudines AC, AB etc. et in A desinere in vnicum punctum, seu in nihilum, antequam incipiat acquirere magnitudines negatiuas Ab, Ac etc. Similiter cogitetur recta AB continenter crescere, ac deinde abire in negatiuam Ab: si AB vtrinque indefinite producatur, et recta quaepiam indefinita MB circa punctum M sensim conuerti intelligatur, ita vt successiue veniat ad positiones MC, MD etc. rectae huius cum indefinita Dd interfectiones C, D etc. designabunt limites positiuos rectae crescentis AB. At postquam recta mobilis MB absoluto quadrante suae conuersionis porro mota fuerit, ac peruenerit e. g. ad positiones Mn, eius interfectiones d, c, b etc. determinabunt limites negatiuos rectae AB ex parte opposita: atqui recta

mobilis MB, antequam incipiat ex oppoſita parte ſecare rectam AB productam, euadit eidem parallela in ſitu MN, ac proinde tunc recta AB euadit infinita, et ſic deinde incipit fieri negatiua, ſeu abire in A*d*, A*c*, A*b* etc.

2) Quaelibet quantitas poſitiua decreſcens in ſerie continua rite exhibetur per fractionem $\frac{x}{a}$, cuius numerator x continenter decreſcat manente eodem denominatore a, et quaeuis quantitas poſitiua in ſerie continua creſcens rite exhibetur per fractionem $\frac{a}{x}$, cuius denominator x continenter decreſcat manente eodem numeratore a. Sit iam quantitatis x pars aliquota $= n$, dum x ſucceſſiue decreſcit, ſeu abit in $x - n$, $x - 2n$, $x - 3n$ etc. euidens eſt fore alicubi $x = 0$, ac deinceps eius valorem fore negatiuum: ergo in caſu primo $\frac{x}{a}$ abit in $\frac{0}{a}$ in ſecundo abit $\frac{a}{x}$ in $\frac{a}{0}$, priusquam valorem acquirat negatiuum, hoc eſt, in caſu primo fit $\frac{x}{a} = 0$, in ſecundo fit $\frac{a}{x} = \infty$. Igitur vniuerſe omnis quantitas continenter decreſcens tranſit per nihilum, et omnis quantitas continenter creſcens tranſit per infinitum, dum e poſitiua fit negatiua, aut cum e negatiua fit poſitiua.

151. *Coroll.* Cum ergo in curuis, quae primum concauitatem, deinde conuexitatem obuertunt axi, creſcentibus abſciſſis decreſcat *dy* vsque ad punctum flexus contrarii, ac deinde creſcat, erit eius differentiale *ddy* vsque ad id punctum negatiuum, ac poſt illud punctum erit poſitiuum (26); contrarium accidit in curuis primum conuexis, deinde concauis: quare in vtrisque *ddy* in puncto flexus contrarii aequatur nihilo, vel infinito quemadmodum ſupra vidimus.

Fig. 47. 152. Si punctum D fuerit punctum regressus, crescente recta AT crescet abscissa AP tamdiu, donec punctum P incidat in C, eritque tunc abscissa AP relate ad punctum D aliquod maximum, ac proinde eius differentiale aequabitur nihilo, vel infinito; hoc est differentiale rectae AT respectu differentialis rectae AP erit infinitum, vel nihilum seu $d\left(\frac{ydx}{dy} - x\right) = d\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right) = 0$, vel $= \infty$, id est $ddy = 0$, vel $= \infty$ vt supra (147).

Fig. 49. 50. 153. Si curuae cuiuspiam ordinatae referantur ad aliquod punctum, seu focum F, ductis ordinatis FM et Fm sibi infinite propinquis ducantur ad easdem perpendiculares FT, et Ft occurrentes tangentibus TM et tm in punctis T et t. Si curua versus focum F concaua fuerit, crescentibus ordinatis vsque ad punctum D fiet Ft > FN, ac deinceps fiet Ft < FN: sin autem curua versus F conuexa fuerit, erit vsque ad punctum D Ft < FN, ac deinceps fiet Ft > FN: ergo in puncto flexus contrarii D recta Nt e positiua incipit fieri negatiua, aut contra, ac proinde transit per nihilum, vel per infinitum (150). Hinc quaerendus est valor rectae Nt, ac in puncto flexus contrarii vel nihilo, vel infinito aequandus.

Vt autem valor rectae Nt determinetur, centro F describantur arcus infinitesimi MR et TO, sitque ordinata FM $= y$, MR $= dx$. Cum arcus infinitesimi MR et TO spectari possint tanquam portiones tangentium ad radios FR et FO perpendiculares, similia erunt triangula MRm, NFm; atqui angulus MNF externus respectu trianguli TNF aequatur duobus internis simul sumtis FTN + NFT, seu ob angulum NFT infinitesimum angulus MNF = FTN: quare similia sunt triangula rectangula MRm, NFm, TFM; erit ergo 1) mR : MR = FM : FT,

seu

seu $dy : dx = y : FT$, vnde $FT = \frac{ydx}{dy}$. 2) Ob sectores FMR, FTO similes erit $FM : MR = FT : TO$, seu $y : dx = \frac{ydx}{dy} : TO$, vnde $TO = \frac{dx^2}{dy}$. 3) Denique ob triangula MRm, TNO similia erit $mR : MR = TO : ON$, seu $dy : dx = \frac{dx^2}{dy} : ON$, vnde $ON = \frac{dx^3}{dy^2}$. Iam cum Ot sit differentiale rectae FT, quae fuit $= \frac{ydx}{dy}$, erit sumendo dx pro constante $Ot = d\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$, et hinc in Fig. 49 $Nt = NO + Ot = \frac{dx^3}{dy^2} + \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$; quod cum in puncto flexus contrarii debeat aequari nihilo, vel infinito, multiplicando omnia per dy^2, et diuidendo per dx erit $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, vel $= \infty$: in Fig. 50 Nt est quantitas negatiua, adeoque $= - \frac{dx^3 - dxdy^2 + ydxddy}{dy^2}$; et hinc multiplicando omnia per dy^2, et diuidendo per $-dx$ erit vt ante $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, vel $= \infty$.

154. *Coroll. 1.* Si in formula reperta fiat $y = \infty$, ordinatae euadent inter se parallelae, eritque ceteris terminis respectu vltimi neglectis $-yddy = 0$, vel $= \infty$, ac diuidendo per $-y$ erit $ddy = 0$, vel $= \infty$ prorsus vt supra (147, 148).

155. *Coroll. 2.* Quae de puncto flexus contrarii isthic dicta sunt, eadem etiam ad punctum regressus accommodari possunt.

CAPVT III.

De vſu Differentialium ſecundorum in punctis flexuum, et regreſſuum determinandis.

156. *PROBL. Determinare punctum flexus contrarii, vel regreſſus in curuis algebraicis, quarum ordinatae inter ſe parallelae ſunt.*

Reſol. Datae ad curuam aequationis capiatur differentiale ſecundum poſito dx conſtante, ac ex eodem eruatur valor differentialis ddy, ponaturque aequalis nihilo, vel infinito, ita inuenietur valor abſciſſae x, cui reſpondet ordinata y occurrens curuae in quaeſito puncto flexus contrarii, vel regreſſus. Quodſi valor inuentus abſciſſae x in data ad curuam aequatione ſubſtituatur, obtinebitur valor etiam ordinatae y curuae in dicto puncto occurrentis.

157. *Coroll.* Si valor abſciſſae x determinatus erui nullus poſſit; aut ſi reperto eiusdem valore determinato, ac in data ad curuam aequatione ſubſtituto, valor ordinatae y prodeat imaginarius, vel repugnantiam inuoluens, id indicio erit curuam propoſitam carere puncto flexus contrarii, aut regreſſus.

Scholion. Methodus allata in ambiguo relinquit, an punctum inuentum ſit punctum flexus contrarii, an vero ſit punctum regreſſus. Tolletur ambiguitas, ſi vel ſublimior curuarum theoria, vel curuae propoſitae forma perſpecta ſit.

Fig. 51. 158. *PROBL. Data curua BDN, ad quam* $y = a\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$, *inuenire punctum flexus contrarii D.*

Reſol. Sit axis curuae AB $= a$, abſciſſa AC $= x$, ordinata CD $= y$, erit datae ad curuam aequationis differentiale dy

$= -\frac{\frac{1}{2} adx . \sqrt{x}(a-x)^{-\frac{1}{2}}}{x} - \frac{\frac{1}{2} adx\sqrt{(a-x)} . x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{-adx . \sqrt{x}}{2x\sqrt{(a-x)}} - \frac{adx\sqrt{(a-x)}}{2x\sqrt{x}}$; ac primae fractionis terminos multiplicando per $\sqrt{x}$, terminos secundae per $\sqrt{(a-x)}$ erit $dy = \frac{-axdx - a^2dx + axdx}{2x\sqrt{(ax-x^2)}} = \frac{-a^2dx}{2x\sqrt{(ax-x^2)}}$, quod rursus differentiando posito dx constante erit $ddy =$

$\frac{2a^2dx^2\sqrt{(ax-x^2)} + \frac{1}{2}a^2dx . 2x(adx - 2xdx) . (ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4x^2(ax-x^2)} = \frac{2a^2dx^2\sqrt{(ax-x^2)}}{4x^2(ax-x^2)}$

$+ \frac{a^3xdx^2 - 2a^2x^2dx^2}{4x^2(ax-x^2)\sqrt{(ax-x^2)}} = 0$, ac terminos primae fractionis multiplicando per $\sqrt{(ax-x^2)}$ erit $\frac{2a^3xdx^2 - 2a^2x^2dx^2 + a^3xdx^2 - 2a^2x^2dx^2}{4x^2(ax-x^2)\sqrt{(ax-x^2)}}$

$= \frac{3a^3dx^2 - 4a^2xdx^2}{4x(ax-x^2)\sqrt{(ax-x^2)}} = 0$; hinc multiplicando omnia per denominatorem, ac diuidendo per dx^2 erit $3a^3 - 4a^2x = 0$, adeoque $3a = 4x$, et $x = \frac{3}{4}a$. Si ergo fiat $AC = \frac{3}{4}AB$, erecta in C ordinata CD occurret curuae in puncto quaesito D. Si valor inuentus abscissae x substituatur in data ad curuam aequatione, erit $y = \frac{a\sqrt{(a-\frac{3}{4}a)}}{\sqrt{\frac{3}{4}a}}$, seu omnia multiplicando per $\sqrt{4}$ erit $y =$

$\frac{a\sqrt{(4a-\frac{3 . 4}{4}a)}}{\sqrt{3a}} = \frac{a\sqrt{(\frac{16}{4}a - \frac{3 . 4}{4}a)}}{\sqrt{3a}} = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3a}} = \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$.

159. *Coroll.* Si poneretur $ddy = \infty$, foret denominator $4x(ax-x^2)\sqrt{(ax-x^2)}$, seu $4x(ax-x^2)^{\frac{3}{2}} = 0$, et hinc $x = 0$, et idem $x = a$. Si iam in data ad curuam aequatione ponatur $x = 0$, erit $y = \frac{a\sqrt{a}}{0} = \infty$; si vero ponatur $x = a$, erit $y = 0$; adeoque in neutro casu elicitur punctum flexus contrarii, sed ex valore $y = \infty$ eruitur rectam AM esse asymptotum curuae ordinatis parallelam.

Fig. 52. 160. *PROBL. Data parabola cubica MDN, ad quam est* $y = a + \sqrt[3]{(a^3 - 2a^2x + ax^2)}$, *inuenire punctum regressus D, ordinatis ad rectam AC relatis.*

Resol. Sit abscissa quaecunque AB $= x$, ordinata BE $= y$ erit datam aequationem differentiando $dy = \frac{1}{3}(-2a^2dx + 2axdx)$ $(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{-2a^2dx + 2axdx}{3(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{2}{3}}}$, cuius differentiale secundum, sumendo dx pro constante, erit $ddy =$

$$\frac{6adx^2(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}(-2a^2dx + 2axdx).(-2a^2dx + 2axdx).(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{-\frac{1}{3}}}{9(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{6adx^2(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{2}{3}}}{9(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{4}{3}}} - \frac{8a^4dx^2 + 16a^3xdx^2 - 8a^2x^2dx^2}{9(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{5}{3}}} = 0,$$ ac primae fractionis terminos diuidendo per $(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{2}{3}}$, ac secundae terminos diuidendo per $a^3 - 2a^2x + ax^2 = (a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{3}{3}}$ erit $\frac{6adx^2 - 8adx^2}{9(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{-2adx^2}{9(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{2}{3}}} = 0$, et hinc omnia multiplicando per denominatorem erit $-2adx^2 = 0$, vnde nullus eruitur valor abscissae x, et ordinatae y. Fiat ergo $ddy = \infty$; erit denominator $9(a^3 - 2a^2x + ax^2)^{\frac{2}{3}} = 0$, adeoque $a^3 - 2a^2x + ax^2 = 0$, et per a diuidendo $a^2 - 2ax + x^2 = 0$, quare etiam $\sqrt{(a^2 - 2ax + x^2)}$, seu $a - x = 0$, adeoque $x = a$, quo valore in data ad curuam aequatione substituto erit $y = a + \sqrt[3]{(a^3 - 2a^3 + a^3)} = a$. Si ergo abscissa AC, ac eidem respondens ordinata CD fiant aequales datae quantitati a, inuenietur punctum regressus D.

161. *Coroll.* Si abſciſſarum origo ponatur eſſe in vertice D, ſitque abſciſſa DP $= x$, ordinata PN $= y$, erit parabolae propoſitae aequatio $y^3 = ax^2$, et hinc $3y^2dy = 2axdx$, ac $dy = \frac{2axdx}{3y^2}$, cuius differentiale ſumendo dx pro conſtante erit $ddy = \frac{6ay^2dx^2}{9y^4} - \frac{12axydxdy}{9y^4} = \frac{2adx^2}{3y^2} - \frac{4axdxdy}{3y^3}$, ac pro dx ponendo valorem eiusdem $\frac{3y^2dy}{2ax}$ erit $ddy = \frac{2adx^2}{3y^2} - \frac{12axy^2dy^2}{6axy^3} = \frac{2adx^2 - 6ydy^2}{3y^2}$; atqui $y = \sqrt[3]{ax^2}$, et hinc $y^2 = \sqrt[3]{a^2x^4}$, ac $3y^2 = 3\sqrt[3]{a^2x^4} = 3x\sqrt[3]{a^2x}$, vnde $dy = \frac{2axdx}{3x\sqrt[3]{a^2x}}$: ergo valoribus hisce ſubſtitutis erit ddy

$$= \frac{2adx^2}{3x\sqrt[3]{a^2x}} - \frac{6\sqrt[3]{ax^2}}{3x\sqrt[3]{a^2x}} \cdot \frac{4a^2x^2dx^2}{9x^2\sqrt[3]{a^4x^2}} = \frac{2adx^2}{3x\sqrt[3]{a^2x}} - \frac{2\sqrt[3]{ax^2}}{x\sqrt[3]{a^2x}} \cdot \frac{4a^2dx^2}{9a\sqrt[3]{ax^2}} =$$

$$\frac{2adx^2}{3x\sqrt[3]{a^2x}} - \frac{8a^2dx^2\sqrt[3]{ax^2}}{9ax\sqrt[3]{a^3x^3}} = \frac{6adx^2 - 8adx^2}{9x\sqrt[3]{a^2x}} = \frac{-2adx^2}{9x\sqrt[3]{a^2x}},$$ qui valor poſitus $= 0$ nihil ſuppeditat; at poſitus $= \infty$ dat $9x\sqrt[3]{a^2x} = 0$, et hinc $x = 0$, ac facta huius valoris ſubſtitutione in aequatione $y^3 = ax^2$, prodit $y = 0$. Habet ergo haec parabola punctum regreſſus in ipſo vertice D.

162. *PROBL. Data curua ADN, cuius ordinatae CD ſint tertiae proportionales ad ordinatas circuli cuiusdam CF, et parabolae CE, inuenire punctum flexus contrarii D.* Fig. 53.

Reſol. Sit diameter circuli AB $= a$, parameter parabolae $= p$, abſciſſa communis AC $= x$, ordinata circuli CF $= t$, ordinata parabolae CE $= y$, ordinata curuae propoſitae CD $= u$, erit ex hypotheſi $t : y = y : u$, hinc $u = \frac{y^2}{t}$; atqui $y^2 = px$ ex natura parabolae, et $t = \sqrt{(ax - x^2)}$ ex natura circuli: ergo his valoribus ſubſtitutis erit

$u = \frac{px}{\surd(ax - x^2)}$, adeoque $du = \frac{pdx\surd(ax - x^2) - \frac{1}{2}px(adx - 2xdx).(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{ax - x^2}$ $= \frac{pdx\surd(ax - x^2)}{ax - x^2} - \frac{\frac{1}{2}apxdx + px^2dx}{(ax - x^2)\surd(ax - x^2)}$, ac multiplicando primae fractionis terminos per $\surd(ax - x^2)$ erit $du = \frac{apxdx - px^2dx - \frac{1}{2}apxdx + px^2dx}{(ax - x^2)\surd(ax^2 - x^2)} = \frac{apxdx}{2(ax - x^2)\surd(ax - x)}$: si ergo dx ponatur constans, erit rursus differentiando $ddu =$

$$\frac{2apdx^2(ax - x^2)\surd(ax - x^2) - 2apxdx^2(a - 2x)\surd(ax - x^2) - apxdx^2(a - 2x).(ax - x^2).(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4\overline{(ax - x^2)\surd(ax - x^2)}^2}$$

$= 0$; et omnia multiplicando imprimis per denominatorem, deinde per $\surd(ax - x^2)$, seu per $(ax - x)^{\frac{1}{2}}$, et diuidendo per dx^2 erit $2ap(ax - x^2)^2 - 3apx(a - 2x).(ax - x^2) = 0$; rursus omnia diuidendo per $ax - x^2$ erit $2ap(ax - x^2) - 3apx(a - 2x) = 0$, consequenter $2ap(ax - x^2) = 3apx(a - 2x)$, seu $2a^2px - 2apx^2 = 3a^2px - 6apx^2$, hoc est $2a - 2x = 3a - 6x$, vnde $4x = a$, et $x = \frac{1}{4}a$. Si ergo fiat AC $= \frac{1}{4}$ AB, ordinata CD in puncto C adplicata occurret curuae in puncto flexus contrarii D.

Fig. 54. 163. *PROBL. Data curua BDN, cuius ordinatae FD sint mediae proportionales inter ordinatas rectanguli parabolae AEH circumscripti CF, et inter rectas CE inter parabolam et rectanguli latus GA interceptas, inuenire punctum flexus contrarii D.*

Resol. Sit parameter parabolae $= p$, recta CF = AB = GH $= a$, abscissa HF = GC $= x$, ordinata parabolae EF $= y$, ordinata curuae FD $= u$, erit CE = CF — EF $= a - y$; quare cum sit ex hypothesi CF : FD = FD : CE, seu $a : u = u : a - y$, erit $u^2 = a^2 - ay$, ac differentiando $2udu = -ady$,

adeoque $du = \frac{-ady}{2u}$, seu cum abscissa HF crescente decrescat ordinata FD, erit $-du = \frac{ady}{2u}$. Est vero in parabola $y = (px)^{\frac{1}{2}}$, et hinc $dy = \frac{1}{2}pdx\,(px)^{-\frac{1}{2}}$, ac praeterea ex natura curuae propositae $u = \sqrt{(a^2 - ay)}$: quare hisce valoribus quantitatum y, dy, et u substitutis erit $-du = \frac{apdx\,(px)^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{(a^2 - a\sqrt{px})}}$; hinc eleuando ad quadratum erit $du^2 = \frac{a^2p^2dx^2\,(px)^{-1}}{16a^2 - 16a\sqrt{px}} = \frac{a^2p^2dx^2\,(px)^{-1}}{16a^2 - \sqrt{256a^2px}}$, seu multiplicando per $px = \sqrt{p^2x^2}$ erit $du^2 = \frac{a^2p^2dx^2}{16a^2px - \sqrt{256a^2p^3x^3}}$. Iam cum in puncto flexus contrarii differentiale quantitatis $-du$ aequetur nihilo, etiam differentiale quadrati eiusdem du^2 aequabitur nihilo, seu posito dx constante erit $2duddu =$

$$\frac{-16a^4p^3dx^3 + \frac{1}{2}a^2p^2dx^2 \cdot 256a^2p^3 \cdot 3x^2dx \cdot (256a^2p^3x^3)^{-\frac{1}{2}}}{(16a^2px - \sqrt{256a^2p^3x^3})^2} =$$

$$\frac{-16a^4p^3dx^3 + (384a^4p^5x^2dx^3) \cdot (256a^2p^3x^3)^{-\frac{1}{2}}}{(16a^2px - \sqrt{256a^2p^3x^3})^2} = 0;$$ quare multiplicando omnia per denominatorem, et diuidendo $16a^4p^3dx^3$ erit $-1 + (24p^2x^2) \cdot (256a^2p^3x^3)^{-\frac{1}{2}} = 0$, vnde $24p^2x^2 \cdot (256a^2p^3x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1$, et omnia multiplicando per $(256a^2p^3x^3)^{\frac{1}{2}}$ erit $24p^2x^2 = \sqrt{256a^2p^3x^3}$, ac eleuando omnia ad quadratum erit $576p^4x^4 = 256a^2p^3x^3$, seu diuidendo omnia per $64p^3x^3$ erit $9px = 4a^2$, ac proinde $x = \frac{4a^2}{9p}$. Si ergo ad rectas $9p$, et $2a$ quaeratur tertia proportionalis, ac ex H in F transferatur, ordinata FD ad abscissam HF adplicata occurret curuae in puncto quaesito flexus contrarii D.

Fig. 55. 164. PROBL. *Data curua BDN, ad quam $ax^2 = y(a^2+x^2)$, inuenire punctum flexus contrarii D.*

Resol. Sit AB $= a$, BC $= x$, CD $= y = \frac{ax^2}{a^2+x^2}$, erit differentiando $dy = \frac{2a^3xdx + 2ax^3dx - 2ax^3dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{2a^3xdx}{(a^2+x^2)^2}$: hinc sumendo dx pro constante erit $ddy = \frac{2a^3dx^2(a^2+x^2)^2 - 4a^3xdx.2xdx.(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^4}$ $= \frac{(2a^7+4a^5x^2+2a^3x^4)dx^2 - 8a^5x^2 - 8a^3x^4)dx^2}{(a^2+x^2)^4} = \frac{(2a^7 - 4a^5x^2 - 6a^3x^4)dx^2}{(a^2+x^2)^4}$ $= 0$; quare multiplicando omnia per denominatorem, et diuidendo per a^3dx^2 erit $2a^4 - 4a^2x^2 - 6x^4 = 0$, et rursus omnia diuidendo per $a^2 + x^2$ erit $2a^2 - 6x^2 = 0$, consequenter $a^2 = 3x^2$, et $x^2 = \frac{1}{3}a^2$, vnde $x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$: si ergo in data ad curuam aequatione pro x^2 ponatur $\frac{1}{3}a^2$, erit $\frac{1}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^2y$, et hinc $y = \frac{1}{4}a$. Quare si inter AB et $\frac{1}{3}$ AB, seu inter a et $\frac{1}{3}a$ quaeratur media proportionalis BC $= \sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$, ac ad eam adplicetur ordinata CD $= \frac{1}{4}$ AB, obtinebitur punctum quaesitum D.

Fig. 56. 165. PROBL. *Determinare punctum flexus contrarii Q in cycloide allongata AQN.*

Resol. Sit semiperipheria circuli genitoris AMB $= a$, basis cycloidis BN $= b$, diameter AB $= 2r$, abscissa AP $= x$, ordinatae PM $= u$, PQ $= y$, arcus AM $= t$; erit ex natura cycloidis $a : b = t :$ MQ, vnde MQ $= \frac{bt}{a}$, adeoque PQ $= y =$ PM + MQ $= u + \frac{bt}{a}$, et $dy = du + \frac{bdt}{a}$; est vero ex natura circuli $u = \sqrt{(2rx - x^2)}$: ergo $du = (rdx - xdx).(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$. Porro ducta ordinata pq priori PQ infinite propinqua, et demisso perpendiculo mR, erit mR $= dx$, MR $=$

du,

du, $Mm = dt$, $Mm^2 = MR^2 + mR^2$, seu $dt^2 = du^2 + dx^2$, et hinc $dt = \sqrt{(du^2 + dx^2)}$.

Si iam valores inuenti quantitatum du et dt in superiori aequatione $dy = du + \frac{bdt}{a}$ substituantur, erit $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} + \frac{b\sqrt{(du^2 + dx^2)}}{a}$, et in secunda fractione pro du^2 ponendo $\frac{r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}$, erit $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} + \frac{b\sqrt{(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2 + dx^2)}}{a\sqrt{(2rx - x^2)}} \frac{\quad}{a}$, adeoque primae fractionis terminos multiplicando per a, terminos vltimae per $\sqrt{(2rx - x^2)}$ erit $dy =$
$$\frac{ardx - axdx + b\sqrt{(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2 + 2rxdx^2 - x^2dx^2)}}{a\sqrt{(2rx - x^2)}} = \frac{ardx - axdx + brdx}{a\sqrt{(2rx - x^2)}};$$
ergo posito dx constante erit $ddy =$
$$\frac{- a^2dx^2\sqrt{(2rx - x^2)} - (ardx - axdx + brdx).(ardx - axdx).(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2(2rx - x^2)}$$
$$= \frac{-adx^2\sqrt{(2rx - x^2)}}{a(2rx - x^2)} - \frac{ar^2dx^2 + arxdx^2 - br^2dx^2 + arxdx^2 - ax^2dx^2 + brxdx^2}{a(2rx - x^2)\sqrt{(2rx - x^2)}} = 0,$$
et hinc multiplicando primae fractionis terminos per $\sqrt{(2rx - x^2)}$ erit
$$- \frac{2arxdx^2 + ax^2dx^2 - ar^2dx^2 + arxdx^2 - br^2dx^2 + arxdx^2 - ax^2dx^2 + brxdx^2}{a(2rx - x^2)\sqrt{(2rx - x^2)}} =$$
$$\frac{(-ar^2 - br^2 + brx)\,dx^2}{a(2rx - x^2)\sqrt{(2rx - x^2)}} = 0,$$
ac multiplicando omnia per denominatorem, et diuidendo per dx^2 erit $brx - ar^2 - br^2 = 0$, adeoque $brx = ar^2 + br^2$, et $x = \frac{ar^2 + br^2}{br} = r + \frac{ar}{b}$. Si ergo ad quantitates b, a, et r quaeratur quarta proportionalis, et addatur radio r, habebitur abscissa AP, cui respondet ordinata PQ occurrens cycloidi in puncto flexus contrarii Q.

Scholion. Tametsi in punctis flexuum contrariorum, et regressuum ddy sit $= 0$, vel $= \infty$, non tamen viciffim semper infertur punctum, in quo est e. g. $ddy = \infty$, esse punctum flexus

contrarii, vel regreſſus; ſed concludi interdum id duntaxat poteſt ordinatam in eo puncto euadere tangentem curuae, aut tangentem ordinatis parallelam eſſe. Sic ſumendo dx pro conſtante ex aequatione circuli $y^2 = 2ax - x^2$ eruitur $ddy = \frac{-a^2dx^2}{(2ax-x^2)\sqrt{(2ax-x^2)}}$; quod ſi fiat $= \infty$, erit denominator $= 0$, adeoque $2ax - x^2 = 0$, ſeu $2ax = x^2$, et $2a = x$, id quod ſolum denotat in extremitate diametri tangentem circuli parallelam eſſe ordinatis.

166. PROBL. *Determinare punctum flexus contrarii, vel regreſſus in curuis ad punctum aliquod fixum relatis.*

Reſol. Cum pro huiusmodi curuis ſupra inuenerimus $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, vel $= \infty$ (153), non alia re opus eſt, quam vt e data ad curuam aequatione eruatur valor quantitatum dy^2 et ddy, ac in praeſente formula ſubſtituatur: hoc enim pacto obtinebitur punctum quaeſitum, id quod vnico exemplo declaraſſe ſufficiat.

Fig. 57. 167. PROBL. *Data conchoide AMN ad polum P relata, determinare punctum flexus contrarii M.*

Reſol. Ductis ordinatis PM et Pm ſibi infinite propinquis, centro P deſcribantur arcus infiniteſimi MR et DH, ſitque AB $= a$, BP $= b$, arculus MR $= dx$, ordinata PM $= y$, PD $= u$. Iam cum natura conchoidis ea ſit, vt DM conſtanter ſit $=$ AB, erit PM $=$ PD $+$ DM $= u + a = y$, et hinc $du = dy$. Porro in triangulo rectangulo PBD eſt BD $= \sqrt{(PD^2 - PB^2)} = \sqrt{(u^2 - b^2)}$: et in triangulis PBD, DHd rectangulis angulus externus PDB ab interno PdD non differt niſi angulo infiniteſimo DPd, adeoque pro aequali haberi poteſt, et duo haec triangula tanquam ſimilia ſpectari: erit ergo BD : PB $= d$H : DH, ſeu

$\sqrt{(u^2 - b^2)} : b = du : DH$, vnde $DH = \frac{bdu}{\sqrt{(u^2-b^2)}}$. Denique ob sectores PDH, PMR similes erit PD : PM = DH : MR, seu $u : u + a = \frac{bdu}{\sqrt{(u^2-b^2)}} : MR$, vnde $MR = dx = \frac{budu + badu}{u\sqrt{(u^2-b^2)}}$, et hinc $du = dy = \frac{udx\sqrt{(u^2-b^2)}}{bu+ba}$; quare posito dx constante erit $ddy = \frac{(bududx + badudx)\sqrt{(u^2-b^2)}}{(bu+ba)^2} + \frac{bu^3dudx + bau^2dudx}{(bu+ba)^2\sqrt{(u^2-b^2)}} - \frac{bududx\sqrt{(u^2-b^2)}}{(bu+ba)^2}$ $= 0$, ac primae et vltimae fractionis terminos multiplicando per $\sqrt{(u^2 - b^2)}$ obtinebitur $ddy = \frac{(bu^3 + 2abu^2 - ab^3)dudx}{(bu+ba)^2\sqrt{(u^2-b^2)}} = 0$, et pro du substituendo valorem supra inuentum $\frac{udx\sqrt{(u^2-b^2)}}{bu+ab}$, erit ddy $= \frac{(bu^4 + 2abu^3 - ab^3u)dx^2}{(bu+ba)^3} = 0$.

Ad haec cum sit $yddy = dx^2 + dy^2$ (153), ponendo pro y valorem $u+a$ erit $uddy + addy = dx^2 + dy^2$, et pro dy ac pro ddy substituendo valores paulo ante inuentos erit $\frac{(u+a).(bu^4 + 2abu^3 - ab^3u)dx^2}{(bu+ba)^3}$ $= dx^2 + \frac{u^2dx^2(u^2-b^2)}{(bu+ba)^2}$, seu $\frac{(bu^5 + 2abu^4 - ab^3u^2 + abu^4 + 2a^2bu^3 - a^2b^3u)dx^2}{(ba+bu)^3}$ $= dx^2 + \frac{(u^4-u^2b^2)dx^2}{(bu+ba)^2}$, id est $\frac{(bu^5 + 3abu^4 - ab^3u^2 + 2a^2bu^3 - a^2b^3u)dx^2}{(bu+ba)^3} =$ $dx^2 + \frac{(u^4-u^2b^2)dx^2}{(bu+ba)^2}$, et hinc primae partis terminos diuidendo per $bu + ba$, secundae vero partis terminos reducendo ad eundem denominatorem erit $\frac{(u^4 - 2au^3 - ab^2u)dx^2}{(bu+ba)^2} = \frac{(u^4 + 2ab^2u + a^2b^2)dx^2}{(bu+ba)^2}$; denique omnia multiplicando per communem denominatorem, et diuidendo per dx^2, ac secundam aequationis partem a prima tollendo, seu aequationem ad nihilum redigendo erit $2u^3 - 3b^2u - ab^2 = 0$, et hinc $u^3 - \frac{3}{2}b^2u - \frac{1}{2}ab^2 = 0$.

Fig. 58. Iam inuenta aequatio construi, seu quantitas u determinari. hunc in modum potest. Circa axem PB parametro b describatur parabola PQN, fiatque PE $= \frac{5}{4}b$, EC $= \frac{1}{4}a$, et centro C per verticem P ducatur circulus secans alicubi parabolam in puncto Q, erit ordinata QF $=$ PD $= u$. Est enim PC$^2 =$ PE$^2 +$ EC$^2 = \frac{25}{16}b^2 + \frac{1}{16}a^2$, et OQ $=$ FQ $-$ CE $= u - \frac{1}{4}a$, ac ex natura parabolae $u^2 =$ PF . b, et hinc PF $= \frac{u^2}{b}$: ergo CO $=$ PF $-$ PE $= \frac{u^2}{b} - \frac{5}{4}b$, et CO$^2 = \frac{u^4}{b^2} - \frac{10}{4}u^2 + \frac{25}{16}b^2$, item OQ$^2 = u^2 - \frac{1}{2}au + \frac{1}{16}a^2$: quare CQ$^2 =$ CO$^2 +$ OQ$^2 = \frac{u^4}{b^2} - \frac{10}{4}u^2 + \frac{25}{16}b^2 + u^2 - \frac{1}{2}au + \frac{1}{16}a^2 =$ PC$^2 = \frac{25}{16}b^2 + \frac{1}{16}a^2$: ergo secundum aequationis membrum ad priorem partem transponendo erit $\frac{u^4}{b^2} - \frac{10}{4}u^2 + u^2 - \frac{1}{2}au$, seu $\frac{u^4}{b^2} - \frac{6}{4}u^2 - \frac{1}{2}au = 0$, et omnia diuidendo per u, ac multiplicando per b^2 erit $u^3 - \frac{3}{2}b^2u - \frac{1}{2}ab^2 = 0$, quae fuit aequatio ad construendum proposita: quare u rite inuentum est.

CAPVT IV.

De curuarum Euolutis, ac de Euolutarum Radiis, et Coradiis.

Fig. 59. 168. Si filum, quod diduci nequeat, curuae cuipiam ABM circumplicatum a curua sensim reuolui concipiatur, ita vt pars quaeuis reuoluta BE, CF, MG etc. probe tensa sit, hoc filum extremo suo A describet curuam quamdam AFN, respectu cuius curua ABM dicitur *euoluta*, portiones autem fili BE, CF etc. *radii euolutae* adpellantur. Curuam AFN euolutione genitam breuitatis caussa *euoluentem* vocabimus.

169. *Coroll. 1.* Si filum terminetur praecise in vertice euolutae A, perspicuum est quamlibet eius portionem BE aequari arcui AB, a quo reuoluta est: contra quemlibet euolutae radium longiorem, vel breuiorem esse arcu correspondente, prout filum vltra, vel citra verticem A pertinuerit.

170. *Coroll. 2.* Dum fili longitudo semper eadem maneat, patet differentiam radiorum BE et GF semper aequari arcui euolutae intercepto BC: et integram euolutam semper esse differentiam radiorum primi, ac vltimi; aut aequari radio vltimo, si primus nullus sit, seu si filum incipiat euolui in ipso vertice euolutae A.

171. *Coroll. 3.* Si curua euoluens AFN geometrica fuerit, in qua scilicet ratio abscissarum ad ordinatas exprimi possit aequatione, quam non ingrediantur quantitates differentiales, sint autem abscissae, et ordinatae lineae rectae, semper poterit geometrice reperiri radius euolutae eiusdem CF, qui cum arcui euolutae ABC vel aequalis sit, vel ab eo data quantitate differat, patet euolutam curuae geometricae rectificabilem esse, seu posse reperiri geometrice lineam rectam, cuilibet eiusdem arcui aequalem.

172. *Coroll. 4.* Radius euolutae est eiusdem tangens. Si enim concipiatur euoluta instar polygoni infinitorum laterum, palam est quemuis radium e. g. CF esse vnius lateris infinitesimi MC continuationem, seu esse curuae tangentem.

173. *Coroll. 5.* Si radius FC alteri GM infinite vicinus producatur, donec eidem occurrat in puncto D, dico FD fore $=$ GD, et arcum iisdem interceptum FG posse haberi pro arcu circuli GH radio DG descripti. Est enim FC $=$ ABC, GM $=$ ABCM, ac tangentes infinitesimae CD $+$ DM sunt $>$ CM; ergo FD $+$ DM $>$ ABCM $>$ GM, ac vtrinque tollendo DM

erit FD > GD, adeoque arcus GH radio DG descriptus intra curuam euoluentem cadit. Iam vero tangentes CD + DM nonnisi infinitesimo tertii gradus superant sinum arcus CM (6 Schol.): ergo etiam ipsum arcum CM nonnisi tanto superant: hinc AC + CD + DM nonnisi infinitesimo tertii gradus excedit arcum ABCM, seu radium GM; quare ablato communi DM, AC + CD seu FD non discrepat a GD nisi infinitesimo tertii gradus: igitur FD = GD, ac proinde arcus GH congruit cum arcu GF.

174. *Coroll. 6.* Cumque curua euoluens AFN possit concipi coalescere ex infinitis arcubus circularibus GH descriptis radiis sibi infinite vicinis, ad quos ii radii perpendiculares sunt, patet quemuis euolutae radium perpendicularem esse ad curuam euoluentem.

175. *Coroll. 7.* Denique cum radiis CF et MG finitis existentibus CD infinitesimum sit, puncta C et D congruunt, et hinc FC = GD = GM. Quare ad determinandum quoduis euolutae punctum, seu longitudinem radii FC, satis erit, si data per methodum tangentium positione normalis FC determinetur punctum C, in quo illa concurrit cum alia normali sibi infinite vicina.

176. Si arculus euoluentis FG radio FC descriptus vltra G continuetur, tanget interius curuam euoluentem, et intrabit intra eiusdem aream, cum radii sequentes, quibus describuntur arcus euoluentis vlteriores, continenter maiores sint, quam FC. Si vero idem arcus GF vltra F continuetur, tanget euoluentem externe, ac exibit extra eiusdem aream, cum radii sequentes continenter minores sint, quam FC. Quare quiuis circulus radio euolutae descriptus tangit euoluentem intus et foris, simulque secat; vnde circulus eiusmodi dicitur curuam *osculari*, et eiusdem, seu euolutae radius adpellatur *radius osculi*, aut etiam *radius curuaturae*, cum a curuatura eiusmodi circuli desumi soleat

curuatura ipſius curuae in illo loco, in quo eam circulus oſculatur. Quodſi ab extremo radii oſculi puncto C ducatur ad ordinatam PM vel FM productam perpendicularis CT, recta MT dicitur *coradius*, quia nempe eodem dato datur etiam radius MC, vt videbimus. *Fig. 60. 61.*

177. *Coroll.* Cum circulorum oſculatorum curuaturae ea ratione decreſcant, qua eorum radii creſcunt, perſpicuum eſt curuaturam euoluentis AFN continenter decreſcere, prout euoluta eiusdem ABM magis ac magis euoluitur; et quidem curuaturam in A, vbi radius vel nullus, vel minimus eſt, eſſe maximam, et in puncto, vbi euolutio definit, eſſe omnium minimam. Hinc facile determinantur loca maximae, vel minimae curuaturae quaerendo minimos, vel maximos euolutae radios ope methodi de maximis, et minimis. *Fig. 59.*

Scholion. Cum curuae referri ſoleant tam ad axem aliquem, quam ad punctum quoddam fixum e. g. ad focum, in ſequentibus pro caſu vtroque exhibebimus formulas generales radii oſculi, et coradii.

178. PROBL. *Inuenire formulam generalem radii oſculi pro curuis ad axem relatis.* *Fig. 60.*

Reſol. Sint PM et *pm* ordinatae ſibi infinite propinquae, MC et *m*C duo radii oſculi, abſciſſa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit MR $= dx$, *m*R $= dy$. Centro C radio CN deſcribatur arcus NQ; propter M*m* et NQ, item MR et NO parallelas ſimilia erunt triangula rectangula MR*m*, NOQ; vnde M*m* : MR $=$ NO : NQ, ſeu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx =$ NO : NQ, et hinc NQ $= \frac{NO \cdot dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$; atqui NO eſt differentiale rectae AN compoſitae ex AP $= x$, et ex ſubnormali PN $= \frac{ydy}{dx}$ (73), ſeu NO

$= d\left(x + \frac{ydy}{dx}\right) = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$; quare hoc valore substituto erit $NQ = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Denique ob sectores CM$m$, CNQ similes erit M$m$: NQ = MC : NC, et Mm — NQ : Mm = MC — NC : MC = MN : MC, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} - \frac{(dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx)}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = MN : MC = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} : MC$ (81), vnde $MC = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dyddx - dxddy}$.

179. *Coroll. 1.* Si dx ponatur constans, vti ponemus in sequentibus, omisso termino $dyddx$ erit $MC = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$. Si dy ponatur constans, omisso termino $-dxddy$ erit $MC = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dyddx}$.

180. *Coroll. 2.* Si Mm seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ponatur constans, formula pro radio sic elicitur. In hac hypothesi $dxddx + dyddy = 0$, et hinc $ddx = \frac{-dyddy}{dx}$. Porro in triangulis MRm, MTC similibus MR : Mm = MT : MC, seu $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = MT : MC$ vnde $MC = \frac{MT}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; quia vero MC = mC (175), erit $d(MC) = 0$, consequenter ob $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constans, erit $\frac{d(MT)\,dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} - MT\,.\,ddx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx^2} = 0$, et pro d (MT) ponendo dy et omnia per dx^2 multiplicando, ac per $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ diuidendo erit $MT = \frac{dydx}{ddx}$, quo valore in aequatione $MC = \frac{MT}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto erit $MC = \frac{dy}{ddx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, aut pro ddx ponendo valorem supra inuentum $\frac{-dyddy}{dx}$ erit idem $MC = \frac{dx}{-ddy}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

181. *Coroll. 3.*

181. *Coroll. 3.* Si MN et mn obliquae fuerint, seu si curua non ad axem, sed ad diametrum referatur, sitque abscissa AN $= x$, ordinata NM $= y$, erit $mr = dy$. Cumque notus sit angulus Anm = Mrm, innotescit etiam angulus mrR, adeoque innotescit ratio laterum in triangulo mrR (Elem. 462), in quo cum sit $mr = dy$, inueniuntur etiam latera rR, et mR, et hinc innotescit Mm, vnde eruitur radius MC vt supra.

182. *Coroll. 4.* Eadem eruitur radii MC expressio, si ordinata mp producatur vsque in t, et MR vsque in L. Similia quippe erunt triangula rectangula MRm, mRL (Elem. 431); vnde MR : mR $= m$R : RL, seu $dx : dy = dy$: RL; quare RL $= \frac{dy^2}{dx}$, et ML = MR + RL $= dx + \frac{dy^2}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$. Praeterea in triangulis CML, CNO similibus est ML : NO = MC : NC, et hinc ML — NO : ML = MC — NC : MC, = MN : MC, seu $\frac{dx^2 + dy^2}{dx} - \frac{(dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx)}{dx^2}$ (178) : $\frac{dx^2 + dy^2}{dx} = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (81) : MC; hinc MC $= \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dyddx - dxddy}$, vt supra.

183. PROBL. *Pro iisdem curuis inuenire formulam generalem coradii MT.*

Resol. Sit MT $= r$, cetera vt supra. Cum in triangulis rectangulis MRm, MTC anguli mMR, TMC remaneant aequales, si a rectis CMm, TMR tollatur idem angulus CMR, haec duo triangula similia sunt; hinc MR : Mm = MT : MC, seu $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = r$: MC; quare MC $= \frac{r\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$. Quia vero MC $= m$C, differentiale radii MC est $= 0$, seu $\frac{dxdr(dx^2 + dy^2) + rdx^2ddx + rdxdyddy - rddx(dx^2 + dy^2)}{dx^2\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$: est vero

$dr = dy$, cum idem fit differentiale rectarum MT, et MP; ergo pro dr ponendo dy, et per communem denominatorem omnia multiplicando erit $dxdy(dx^2 + dy^2) + rdx^2ddx + rdxdyddy - rdx^2ddx - rdy^2ddx = dxdy(dx^2 + dy^2) + rdxdyddy - rdy^2ddx = 0$, ac omnia diuidendo per dy erit $dx(dx^2 + dy^2) + rdxddy - rdyddx = 0$, et hinc $dx(dx^2 + dy^2) = rdyddx - rdxddy$, adeoque $r = MT = \frac{dx(dx^2 + dy^2)}{dyddx - dxddy}$.

184. *Coroll. 1.* Si dx, vt plurimum fit, constans esse ponatur, omisso termino $dyddx$ erit $MT = \frac{dx(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$. Si dy ponatur constans, omisso termino $-dxddy$ erit $MT = \frac{dx(dx^2 + dy^2)}{dyddx}$. Si denique Mm, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ponatur constans, erit tunc $dxddx + dyddy = 0$, et hinc $ddx = \frac{-dyddy}{dx}$; atqui tunc $MT = \frac{dxdy}{ddx}$ (180), quare pro ddx ponendo $\frac{-dyddy}{dx}$ erit itidem $MT = \frac{dx^2dy}{-dyddy} = \frac{dx^2}{-ddy}$.

185. *Coroll. 2.* Si ordinatae ad axem obliquae fuerint, seu si curua referatur ad diametrum, in proportione $MR : Mm = MT : MC$ satis erit ponere valores respectiuos, quos tunc MR, et Mm habent: cetera peragentur vt ante.

186. *Coroll. 3.* Habita formula generali radii osculi immediate inueniri potest expressio coradii ope superioris proportionis $Mm : MR = MC : MT$, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dyddx - dxddy} : MT$; est enim hinc $MT = \frac{dx(dx^2 + dy^2)}{dyddx - dxddy}$, vt supra. Similiter habita formula generali coradii, immediate inueniri potest ope eiusdem proportionis expressio radii.

187. PROBL. *Inuenire formulam generalem radii osculi pro curuis, quarum ordinatae ad punctum aliquod fixum e. g. ad focum F referuntur.* Fig. 61.

Resol. Sint radii osculi infinite sibi propinqui MC, et *m*C, in quos e foco F demittantur perpendicula FL et FN, ac centro F describatur arcus infinitesimus MR $= dx$, erit *m*R $= dy$ posito FM $= y$. Iam triangula rectangula MR*m*, MFL similia sunt, cum ab angulis rectis CM*m*, FMR tollendo eundem angulum LMR remaneant anguli RM*m*, FML inter se aequales: quare M*m* : MR = FM : ML, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = y :$ ML; vnde ML $= \frac{ydx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$: item M*m* : *m*R = FM : FL, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy = y :$ FL; vnde FL $= \frac{ydy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$: quare rectae FL differentiale ON est $= d\left(\frac{ydy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}\right) =$

$$\frac{(yddy + dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} - ydy\,(dxddx + dyddy).(dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^2+dy^2}$$

$$= \frac{(yddy+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx^2+dy^2} - \frac{(dxddx - dyddy)\,ydy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}},$$ seu terminos primae fractionis multiplicando per $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ erit ON $=$

$$\frac{(yddy+dy^2).(dx^2+dy^2) - (dxddx - dyddy)\,ydy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$ Est vero ob sectores CM*m*, CON similes M*m* : ON = MC : OC, et hinc M*m* — ON : M*m* = MC — OC : MC = MO seu ML : MC, seu valoribus substitutis $\sqrt{(dx^2+dy^2)} - \frac{(yddy+dy^2).(dx^2+dy^2)-(dxddx-dyddy)ydy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}} : \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{ydx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$: MC; vnde MC $= \frac{y(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx^2+ydyddx+dxdy^2-ydxddy}.$

188. *Coroll. 1.* Si dx conſtans fuerit, omiſſo termino $ydyddx$ erit $MC = \frac{y(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$. Si dy fuerit conſtans, omiſſo termino $-ydxddy$ erit $MC = \frac{y(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx^3 + ydyddx + dxdy^2}$.

189. *Coroll. 2.* Si Mm, ſeu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ conſtans fuerit, erit $dxddx + dyddy = 0$, et hinc $ddx = \frac{-dyddy}{dx}$, quo poſito expreſſio radii MC pro hoc caſu ſic eruitur. In triangulis ſimilibus MRm, MTC eſt $MR : mR = MT : TC$, ſeu $dx : dy = MT : TC$, vnde $TC = \frac{MT \cdot dy}{dx}$.

Rurſus $MR : Mm = MT : MC$, ſeu $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = MT : MC$; vnde $MC = \frac{MT \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$; cuius differentiale cum aequetur nihilo, erit poſito dx conſtante $\frac{d(MT)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} + \frac{MT \cdot dyddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{d(MT)\,dx^2 + d(MT)\,dy^2 + MT \cdot dyddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$; hinc $MT = \frac{d(MT)\,dx^2 + d(MT)\,dy^2}{-dyddy}$. Denique ob triangula FMR, CDG ſimilia eſt $FM : CG$ ſeu $CT = MR : DG$, ſiue $y : \frac{MT \cdot dy}{dx} = dx : DG$, vnde $DG = \frac{MT \cdot dy}{y}$. Eſt vero $MT = FM + FT$: ergo $d(MT) = d(FM + FT) = MR + DG = dy + \frac{MT \cdot dy}{y} = \frac{ydy + MT \cdot dy}{y}$.

Si iam $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ponatur conſtans, erit differentiando ſuperiorem expreſſionem radii MC, $\frac{dx \cdot d(MT)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} - MT\,ddx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx^2} = 0$, ac omnia multiplicando per dx^2, et diuidendo per $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ erit $dx \cdot d(MT) - MT \cdot ddx = 0$, et hinc $dx \cdot d(MT) =$

$MT \cdot ddx$, vnde $MT = \frac{dx \cdot d(MT)}{ddx}$, ac pro d (MT substituendo valorem supra inuentum $\frac{ydy + MTdy}{y}$, erit $MT = \frac{ydxdy + MT \cdot dxdy}{yddx}$, seu $MT \cdot yddx = ydxdy + MT \cdot dxdy$, adeoque $MT = \frac{ydxdy}{yddx - dxdy}$, quo valore substituto in expressione superiore radii MC erit $MC = \frac{ydy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{yddx - dxdy}$: si porro pro ddx ponatur $\frac{-dyddy}{dx}$, erit idem $MC = \frac{ydx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-yddy - dx^2}$.

190. *Coroll. 3.* Si ponatur $y = \infty$, terminis, in quibus deest y, euanescentibus eaedem obtinebuntur expressiones radii, quas supra relate ad axem inuenimus (180); id quod euenire necesse est, cum in hac hypothesi ordinatae euadant parallelae.

191. PROBL. *Inuenire formulam generalem coradii MT in eadem hypothesi.*

Resol. Sit $ML = t$, erit $LO = dt$; cumque triangula FLO, CON, CMm similia sint, erit $MC : Mm = FL : dt$; vnde $FL = \frac{MC \cdot dt}{Mm}$. Item ob triangula M$m$R, MFL similia erit $Mm : mR = FM : FL$, seu $Mm : dy = y : FL$, vnde $FL = \frac{ydy}{Mm}$: ergo $\frac{ydy}{Mm} = \frac{MC \cdot dt}{Mm}$, seu $ydy = MC \cdot dt$, et $MC = \frac{ydy}{dt}$. Denique ob triangula MFL, MTC similia est $MF : ML = MC : MT$, seu $y : t = \frac{ydy}{dt} : MT$; vnde $MT = \frac{tdy}{dt}$; atqui $t = \frac{ydx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ (187): ergo pro t hunc valorem substituendo, et pro dt ponendo $d\left(\frac{ydx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}\right) = \frac{dx^3dy + ydy^2ddx + dxdy^3 - ydxdyddy}{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$, erit $MT = \frac{ydx(dx^2 + dy^2)}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$.

192. *Coroll.* Eadem corollaria locum hic habent, quae paulo ante ad formulam generalem radii adnotauimus (188, 189).

CAPVT V.

De vsu Differentialium secundorum in Radiis, et Coradiis osculi, ac in Euolutis curuarum determinandis.

193. PROBL. *Data aequatione ad curuam inuenire radium, et coradium osculi.*

Resol. Capiatur datae aequationis differentiale secundum, ac inde eruatur valor quantitatum dy, dy^2, ddy in terminis dx continentibus; vel valor quantitatum dx, dx^2, ddx in terminis dy continentibus, et substituatur in formulis generalibus capite superiore inuentis: hoc pacto obtinebitur radius, vel coradius in terminis cognitis, ac ab omni differentiali quantitate liberis.

194. *Coroll. 1.* Si valor radii, vel coradii prodeat positiuus, accipi debet ex parte axis, vel foci, versus quem tunc curua concaua est. At si valor prodeat negatiuus, accipi debet ex parte opposita axi, vel foco, cui tunc curua conuexitatem obuertit.

195. *Coroll. 2.* Si curua habeat punctum flexus contrarii, coradius in eo puncto e positiuo negatiuus fit, ac duo radii osculi sibi infinite propinqui, qui antea diuergentes erant, incipiunt fieri conuergentes, quod fieri vtique nequit, quin prius vel euadant paralleli, adeoque infiniti in puncto flexus contrarii; vel inter se congruant, ita vt in puncto illo radius euolutae nullus fit. Pri-
Fig. 62. mum euenit, dum radii CM adpropinquando ad punctum flexus
Fig. 63. D continenter crescunt: alterum, cum iidem radii CM accedendo ad punctum illud flexus contrarii D continenter decrescunt.

Haec eadem intelligi debent etiam de curuis punctum regressus habentibus.

196. *PROBL. Inuenire coradium MT in parabola.* *Fig. 64.*

Resol. Cum sit in parabola $y^2 = px$, erit differentiando $2ydy = pdx$, et $dy = \frac{pdx}{2y}$, adeoque $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2}$. Porro sumendo dx pro constanti erit $ddy = \frac{-pdxdy}{2y^2}$, ac pro dy ponendo $\frac{pdx}{2y}$ erit $ddy = \frac{-p^2dx^2}{4y^3}$. Si ergo in formula generali coradii $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ (184) valores inuenti substituantur pro dy^2, et $-ddy$, erit MT $= \frac{4y^3+p^2y}{p^2}$, ac pro y ponendo $\sqrt{px}$, erit idem MT $= \sqrt{px} + \frac{4x\sqrt{px}}{p}$. Quare si ad punctum M ducatur tangens MV occurrens axi AS producto in puncto V, ac ad eam erigatur perpendicularis VT occurrens ordinatae MP productae in puncto T, obtinebitur coradius MT. Est enim in triangulis MPV, PVT similibus (Elem. 431) MP : PV = PV : PT, seu $\sqrt{px} : 2x$ (41) $= 2x$: PT; vnde PT $= \frac{4x^2}{\sqrt{px}}$; ac multiplicando terminos fractionis per $\sqrt{px}$ erit PT $= \frac{4x^2\sqrt{px}}{px} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$: ergo MT = MP + PT $= \sqrt{px} + \frac{4x\sqrt{px}}{p}$.

197. *Coroll. 1.* Cum sit MP : PN = MT : TC; seu $\sqrt{px} : \frac{1}{2}p$ (75) $= \sqrt{px} + \frac{4x\sqrt{p}}{p}$: TC, erit TC = PS $= \frac{1}{2}p + 2x$; et quia PN $= \frac{1}{2}p$ (cit.) erit NS $= 2x = 2$AP. Si ergo fiat NS $= 2$AP, ac ex puncto S ducatur recta SC ordinatae PM parallela occurrens normali MN productae in puncto C, determinabitur radius osculi MC, et punctum euolutae C.

198. *Coroll. 2.* Idem habito coradio MT commodius determinabitur, si ex puncto T ducatur TC axi AS parallela occurrens normali in puncto C.

199. *Coroll. 3.* Si DS sit $= u$, CS $= t$, cum sit PT $=$ CS $= \frac{4x\sqrt{px}}{p}$ (196), erit $t = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$. Porro cum sit PS $= \frac{1}{2}p + 2x$ (197), et AD ex paulo post dicendis $= \frac{1}{2}p$, erit DS $=$ AP $+$ PS $-$ AD $= x + \frac{1}{2}p + 2x - \frac{1}{2}p = 3x = u$, ac $x = \frac{u}{3}$; quo valore in aequatione $t = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$ substituto erit $t = \frac{4u\sqrt{\frac{1}{3}pu}}{3p}$, et hinc $t^2 = \frac{16pu^3}{27p^2} = \frac{16u^3}{27p}$, adeoque $u^3 = \frac{27pt^2}{16}$: est ergo euoluta parabolae communis parabola cubica, cuius parameter est $\frac{27}{16}$ pars parametri parabolae euoluentis.

Fig. 65. 200. *Coroll. 4.* Integrae parabolae communis ABC euoluta est integra parabola cubica FDE habens in D punctum regressus. Nempe ramus DE sui euolutione gignit arcum parabolae BA, et ramus DF arcum BC.

Fig. 64. 201. *PROBL. Inuenire radium osculi MC in parabola independenter a coradio MT.*

Resol. Cum in parabola sit $dy = \frac{pdx}{2y}$, $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2}$, $ddy = \frac{-p^2dx^2}{4y^3}$ (196), erit pro y ponendo $\sqrt{px}$, $ddy = \frac{-p^2dx^2}{4px\sqrt{px}} = \frac{-pdx^2}{4x\sqrt{px}}$: Si ergo in formula generali radii $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy}$ (179) hi valores substituantur, erit

$$MC = \frac{\left(dx^2+\frac{p^2dx^2}{4y^2}\right)\sqrt{\left(dx^2+\frac{p^2dx^2}{4y^2}\right)}\,4x\sqrt{px}}{pdx^3},$$

seu pro y^2 ponendo px erit

$$MC = \frac{\left(dx^2+\frac{pdx^2}{4x}\right)\sqrt{\left(dx^2+\frac{pdx^2}{4x}\right)}\,4x\sqrt{px}}{pdx^3}$$

$=$

$$= \frac{\frac{(4xdx^2+pdx^2)}{4x}\sqrt{\frac{(4xdx^2+pdx^2)}{4x}}4x\sqrt{px}}{pdx^3} = \frac{(4xdx^2+pdx^2).dx\sqrt{(4x+p)}4x\sqrt{px}}{4xpdx^3 \quad 2 \quad \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(4xdx^3+pdx^3)\sqrt{(4x+p)}4x\sqrt{px}}{8pxdx^3\sqrt{x}} = \frac{(4x+p)\sqrt{(4x+p)}\sqrt{px}}{2p\sqrt{x}} = \frac{(4x+p)\sqrt{(4x+p)}}{2\sqrt{p}},$$

ac denique multiplicando fractionis terminos per $p\sqrt{p}$ erit MC $= \frac{(4px+p^2)\sqrt{(4px+p^2)}}{2p^2}$. Iam in triangulo rectangulo MPN est $MN^2 = MP^2 + PN^2 = px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{4px+p^2}{4}$, adeoque $MN = \frac{1}{2}\sqrt{(4px+p^2)}$, et $MN^2 . MN = MN^3 = \frac{(4px+p^2)\sqrt{(4px+p^2)}}{8}$: et $8MN^3 = (4px+p^2)\sqrt{(4px+p^2)}$; quare in postrema radii MC expressione valorem hunc substituendo erit $MC = \frac{8MN^3}{2p^2} = \frac{4MN^3}{p^2}$. Ergo si post parametrum p, et normalem MN quaerantur duae continue proportionales $\frac{MN^2}{p}$, $\frac{MN^3}{p^2}$, erit quadruplum termini quarti = MC.

202. *Coroll. 1.* Si petatur radius osculi pro determinato aliquo parabolae puncto, satis erit in expressione radii pro quouis puncto inuenta $\frac{(4x+p)\sqrt{(4x+p)}}{2\sqrt{p}}$ substituere valorem abscissae x dato puncto respondentis. E. g. Si petatur radius osculi pro vertice parabolae A, vbi $x = 0$, erit $MC = \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2}p$.

203. *Coroll. 2.* Si ergo e radio quouis osculi MC tollatur $\frac{1}{2}p$, seu radius vertici A respondens, reliquum aequabitur arcui euolutae CD. Hinc parabola cubica, quae ordinariae euoluta est, potest geometrice rectificari.

204. PROBL. *Inuenire radium osculi MC in circulo.* *Fig. 64.*

Resol. Sit diameter circuli $= 2r$, erit $y^2 = 2rx - x^2$, $ydy = rdx - xdx$, ac posito dx constante erit differentiando $dy^2 +$

$yddy = -dx^2$, et hinc $-ddy = \frac{dx^2 + dy^2}{y}$, quem valorem in formula generali coradii $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ (184) ſubſtituendo erit MT $= \frac{y(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2} = y =$ MP : ergo punctum T cadit in P, punctum C in N, eritque MC $=$ MN $= r$ (85). Quare circulus, qui circulum oſculatur, cum eodem congruit. Et quia omnes radii oſculi, vtpote radii eiusdem circuli, in eodem puncto, nempe in centro concurrunt, circuli euoluta eſt vnicum punctum: quod quidem vel inde patet, quod ſi filum probe tenſum circa punctum aliquod reuoluatur, generet circulum.

Fig. 66. 205. *PROBL. Inuenire radium oſculi MC in ellipſi, aut in hyperbola.*

Reſol. Sit axis $= a$, parameter $= p$, abſciſſa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit $y^2 = px \mp \frac{px^2}{a} = \frac{apx \mp px^2}{a}$, hinc $y = \frac{\sqrt{(apx \mp px^2)}}{\sqrt{a}}$, ac differentiando erit $dy = \frac{apdx \mp 2pxdx}{2\sqrt{(a^2px \mp apx^2)}}$, $dy^2 = \frac{a^2p^2dx^2 \mp 4ap^2xdx^2 + 4p^2x^2dx^2}{4a^2px \mp 4apx^2}$: rurſus differentiando valorem quantitatis dy poſito dx conſtante erit $ddy = \frac{-a^3p^2dx^2}{(4a^2px \mp 4apx^2)\sqrt{(a^2px \mp apx^2)}}$: iam hos valores ſubſtituendo in formula generali radii $\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$ (179) erit MC $=$

$$\frac{(4a^2pxdx^2 \mp 4apx^2dx^2 + a^2p^2dx^2 \mp 4ap^2xdx^2 + 4p^2x^2dx^2)}{4a^2px \mp 4apx^2} dx \sqrt{}$$

$$\frac{(4a^2px \mp 4apx^2 + a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2)}{2\sqrt{(a^2px \mp apx^2)}}$$ diuiſum per $\frac{a^3p^2dx^3}{(4a^2px \mp 4apx^2)\sqrt{(a^2px \mp apx^2)}}$, ſeu multiplicatum per eundem diuiſorem inuerſum $\frac{(4a^2px \mp 4apx^2)\sqrt{(a^2px \mp apx^2)}}{a^3p^2dx^3}$, ſeu erit $=$

$$\frac{(4a^2pxdx^3 \mp 4apx^2dx^3 + a^2p^2dx^3 \mp 4ap^2xdx^3 + 4p^2x^2dx^3)\sqrt{(4a^2px \mp 4apx^2 + a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2)}}{2a^3p^2dx^3}$$

$$= \frac{(a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px \mp 4apx^2)\sqrt{(a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px \mp 4apx^2)}}{2a^3p^2}$$

Iam normalis MQ eſt $= \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (81), vbi ſi pro y, et dy^2 valores ſuperiores ſubſtituantur, erit MQ $= \frac{\sqrt{(a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px \mp 4apx^2)}}{2a}$, et $MQ^2 . MQ = MQ^3 = \frac{(a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px \mp 4apx^2)}{4a^2}\sqrt{\frac{(a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px \mp 4apx^2)}{2a}}$, adeoque $8a^3 . MQ^3 = (a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px \mp 4apx^2)\sqrt{(a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px \mp 4apx^2)}$, quo valore in poſtrema radii MC expreſſione ſubſtituto erit MC $= \frac{8a^3 . MQ^3}{2a^3p^2} = \frac{4MQ^3}{p^2}$. Si ergo poſt parametrum p, et normalem MQ quaerantur duae continue proportionales $\frac{MQ^2}{p}$, $\frac{MQ^3}{p^2}$, erit radius oſculi MC aequalis quadruplo termini quarti.

206. *Coroll. 1.* Si fiat $x = 0$, fiet MC $= \frac{a^2p^2\sqrt{a^2p^2}}{2a^3p^2} = \frac{a^3p^3}{2a^3p^2} = \frac{1}{2}p$; hoc eſt, radius circuli ellipſim, vel hyperbolam in vertice A oſculantis aequatur ſemiparametro ellipſeos, vel hyperbolae.

207. *Coroll. 2.* Si fiat $x = \frac{1}{2}a$, erit in ellipſi MC $=$ DG $= \frac{a\sqrt{ap}}{2p}$; eſt autem $\sqrt{ap}$ axis coniugatus ellipſeos (Elem. 636): ergo ſi quarta proportionalis ad $2p$, a, et ad axem coniugatum inueniatur, ac transferatur ſupra axem coniugatum productum a D vsque in G, erit punctum G in euoluta, et ſimul erit idem punctum regreſſus.

208. *Coroll. 3.* Si fiat $a = p$ in ellipſi, erit MC $= \frac{1}{2}a$, vbicunque accipiatur punctum M; ac proinde omnes radii oſculi

inter se aequabuntur, eritque euoluta vnicum punctum, ac ellipsis abibit in circulum.

Fig. 67. 209. PROBL. *Inuenire coradium MT, et radium osculi MC in hyperbola ad asymptotum relata.*

Resol. Sit recta constans AH, quae hyperbolae potentia dicitur $= a$, abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura hyperbolae $a^2 = xy$, et hinc $xdy + ydx = 0$, ac $dy = \frac{-ydx}{x}$, cuius differentiale sumendo dx pro constanti, erit $ddy = \frac{-xdxdy + ydx^2}{x^2}$, seu pro xdy ponendo $-ydx$ erit $ddy = \frac{ydx^2 + ydx^2}{x^2}$: si ergo in formula coradii $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ hic valor substituatur, erit MT $= \frac{(dx^2 + dy^2)x^2}{-2ydx^2}$, et pro dy^2 ponendo $\frac{y^2dx^2}{x^2}$ erit idem MT $= \frac{(x^2dx^2 + y^2dx^2)x^2}{-2yx^2dx^2} = \frac{x^2 + y^2}{-2y}$. Itaque producatur recta AM, ac in ea capiatur MN $= \frac{1}{2}$ AM $= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 + y^2)}$, et in eiusdem extremo erigatur perpendicularis NT occurrens ordinatae PM productae in puncto T, erit MT coradius. Nam ob triangula APM, MTN similia erit MP : AM $=$ MN : MT, seu $y : \sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2)}$: MT; vnde MT $= \frac{x^2+y^2}{2y}$ ex parte scilicet asymptoto AB opposita. Si iam ex puncto T ducatur TC asymptoto AB parallela occurrens normali MC in puncto C, erit MC radius osculi.

210. *Coroll. 1.* Si quaeratur coradius, et radius pro vertice hyperbolae D, fit abscissa AP seu $x =$ AH $= a$, et $y =$ HD $= a$, et hinc coradius $\frac{x^2 + y^2}{-2y}$ erit in vertice $= -a$, et radius $= -\sqrt{2a^2}$.

211. *Coroll. 2.* Reperitur etiam radius osculi pro vertice D ope formulae generalis radii $\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$, si in ea sub-

ſtituantur valores quantitatum dy^2, et ddy; erit enim MC $= \frac{(x^2dx^2 + y^2dx^2)}{x^2} \sqrt{\frac{(x^2dx^2 + y^2dx^2)}{x^2}}$ diuiſio per $-\frac{2ydx^2}{x^2}$, ſeu erit $= \frac{(x^2dx^2 + y^2dx^2)\,dx\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^3}$ multiplicato per $\frac{x^2}{-2ydx^3}$, adeoque erit MC $= \frac{(x^2dx^3+y^2dx^3)\sqrt{(x^2+y^2)}}{-2xydx^3} = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)}}{-2xy} = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)}}{-2a^2}$. Si iam petatur radius pro vertice D, ſeu radius minimus, erit differentiando formulam poſtremam radii $\frac{(2xdx + 2ydy)\sqrt{(x^2+y^2)} + (xdx + ydy).(x^2+y^2).(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-2a^2}$ $= \frac{(2xdx + 2ydy)\sqrt{(x^2+y^2)}}{-2a^2} + \frac{(xdx + ydy).(x^2+y^2)}{-2a^2\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$, ſeu multiplicando primae fractionis terminos per $\sqrt{(x^2+y^2)}$, ac per communem denominatorem rurſus omnia multiplicando erit $(2xdx + 2ydy).(x^2+y^2) + (xdx + ydy).(x^2+y^2) = 0$, ſeu $(3xdx + 3ydy).(x^2+y^2) = 0$, ac pro dy ponendo valorem ſupra (209) inuentum $\frac{-ydx}{x}$, erit $\frac{(3x^2dx - 3y^2dx)}{x}.(x^2+y^2) = 0$; denique omnia multiplicando per x, et diuidendo per x^2+y^2 erit $3x^2dx - 3y^2dx = 0$, et hinc $3x^2 = 3y^2$, ſeu $x = y = a$, cum ſit $xy = a^2$. Si ergo hic valor in formula ſuperiore $\frac{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)}}{-2a^2}$ ſubſtituatur, erit radius in vertice D $= \frac{2a^2\sqrt{2a^2}}{-2a^2} = -\sqrt{2a^2}$ vt ſupra.

212. PROBL. *Inuenire radium oſculi MC, et coradium MT in logarithmica DMN.* Fig. 68.

Reſol. Sit abſciſſa AP $= x$, ordinata PM $= y$, cum ex natura logarithmicae ſubtangens QP conſtans ſit, ponatur ea $= a$, erit $\frac{ydx}{dy} = a$ (36), et hinc $dy = \frac{ydx}{a}$, $dy^2 = \frac{y^2dx^2}{a^2}$: item valorem quantitatis dy rurſus differentiando, poſito dx conſtante, erit ddy

$= \frac{dxdy}{a}$, pro dy ponendo $\frac{ydx}{a}$ erit $ddy = \frac{ydx^2}{a^2}$: ſi ergo in formula generali radii $\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$ valores inuenti pro dy^2 et pro ddy ſubſtituantur, erit MC $= \frac{(a^2dx^2 + y^2dx^2)}{a^2} \sqrt{\frac{(a^2dx^2 + y^2dx^2)}{a}} . \frac{a^2}{-ydx^2}$ $= \frac{(a^2dx^3 + y^2dx^3)\sqrt{(a^2+y^2)}}{-aydx^3} = \frac{(a^2 + y^2)\sqrt{(a^2+y^2)}}{-ay}$, qui valor cum negatiuus ſit, radius MC cadit in partem axi AB oppoſitam. Iisdem valoribus ſubſtitutis in formula generali coradii $\frac{(dx^2 + dy^2)}{-ddy}$ erit MT $= \frac{a^2+y^2}{-y}$, qui proinde pariter in partem oppoſitam cadit, eſtque in ea parte $= \frac{a^2+y^2}{y}$.

Iam cum triangula AMP, MTC, QMP ſimilia ſint, erit QP : PM = MT : TC, ſeu $a : y = \frac{a^2+y^2}{y}$: TC; vnde TC = PO $= \frac{a^2+y^2}{a}$: eſt item QP : PM = PM : PA (Elem. 431), ſeu $a : y = y$: PA; vnde ſubnormalis PA $= \frac{y^2}{a}$: ergo QA = QP + PA $= a + \frac{y^2}{a} = \frac{a^2+y^2}{a}$, adeoque QA = TC = PO: ſi ergo fiat PO = QA, et in puncto O erigatur perpendicularis OC occurrens normali MC in puncto C, erit punctum C in euoluta logarithmicae, et MC euolutae radius.

213. *Coroll. 1.* Cum in triangulo rectangulo QMP ſit QM^2 = QP^2 + PM^2 $= a^2 + y^2$, erit QM $= \sqrt{(a^2 + y^2)}$: quare cum radius MC acceptus ex parte axi oppoſita ſit $= \frac{(a^2+y^2)\sqrt{(a^2+y^2)}}{ay}$, erit $y : \frac{a^2+y^2}{a} = \sqrt{(a^2 + y^2)}$: MC, ſeu MP : TC = QM : MC; adeoque poteſt radius MC directe inueniri.

214. *Coroll. 2.* Cum AB aſymptotus ſit, et curuatura logarithmicae iaceat intra angulum BAN, patet in curua hac debere

haberi punctum aliquod maximae curuaturae, seu minimi radii, ac proinde euolutam in loco ei puncto respondente debere habere punctum regressus. Sit hoc punctum M, erit MC omnium radiorum minimus, adeoque $d\,(MC) = d\left(\frac{(a^2+y^2)\sqrt{(a^2+y^2)}}{-ay}\right) =$

$$\frac{-2ay^2dy\sqrt{(a^2+y^2)} - ay^2dy(a^2+y^2).(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + ady(a^2+y^2)\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2y^2}$$

$= o$, seu omnia multiplicando per a^2y^2, et per $(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, seu per $\sqrt{(a^2+y^2)}$ habebitur $-3ay^2dy\,(a^2+y^2) + ady\,\overline{(a^2+y^2)}^{\,2} = o$, ac omnia diuidendo per $ady\,(a^2+y^2)$ erit $-3y^2 + a^2 + y^2 = o$, vnde $a^2 = 2y^2$, et $y = PM = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$. Si ergo diametro $PQ = a$ describatur semicirculus, ac eius peripheria secetur bifariam in R, ducanturque chordae QR et PR, erit ob angulum R in semicirculo rectum $QP^2 = QR^2 + RP^2$, seu $a^2 = 2RP^2$; est adeo $RP = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$. Quare si RP transferatur in AF, et ducatur FM asymptoto AB parallela, erit M punctum quaesitum, cum sit $PM = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = y$.

215. PROBL. *Inuenire radium osculi MC in cycloide vulgari, cuius scilicet basis DE aequatur semiperipheriae circuli genitoris FPD.* *Fig. 69.*

Resol. Sit diameter circuli genitoris $FD = a$, abscissa $FG = x$, ordinata $GM = y$, erit ex natura circuli $GP^2 = FG.GD = 2ax - x^2$, et $GP = \sqrt{(2ax - x^2)}$. Sit porro arcus $FP = u$, erit ex natura cycloidis $PM = u$, et hinc $GM = y = u + \sqrt{(2ax - x^2)}$: ergo differentiando erit $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Ducatur alia ordinata gm priori GM infinite propinqua, erit $Pp = du$; atqui Pp est hypothenusa trianguli rectanguli infinitesimi, cuius vnus cathetus est $gG = dx$, alter est differentiale ordinatae GP, seu est $= d\,(2ax - x^2) = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, et hinc $du^2 = dx^2$

$+\frac{a^2dx^2 - 2axdx^2 + x^2dx^2}{2ax - x^2}$, seu facta reductione $= \frac{a^2dx^2}{2ax - x^2}$, adeoque $du = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Si ergo in aequatione superiore $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ pro du hic valor substituatur, erit $dy = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, cuius differentiale, posito dx constante, est $ddy =$

$$\frac{-dx^2\sqrt{(2ax - x^2)} - (2a^2dx^2 + 2axdx^2 + axdx^2 - x^2dx^2).(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2ax - x^2},$$

seu omnia multiplicando per $\sqrt{(2ax - x^2)} = (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ erit $ddy = \frac{-2a^2dx^2 + axdx^2}{(2ax - x^2)\sqrt{(2ax - x^2)}}$, ac per $2a - x$ diuidendo erit $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Si iam in formula generali radii $\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$ pro dy^2 et pro ddy valores inuenti substituantur, erit $\mathrm{MC} = \frac{(2axdx^2 - x^2dx^2 + 4a^2dx^2 - 4axdx^2 + x^2dx^2)}{2ax - x^2} . \sqrt{\frac{(2axdx^2 - x^2dx^2 + 4a^2dx^2 - 4axdx^2 + x^2dx^2)}{\sqrt{(2ax - x^2)}}}$ diuiso per $\frac{adx^3}{x\sqrt{(2ax - x^2)}}$, seu multiplicato per $\frac{x\sqrt{(2ax - x^2)}}{adx^3}$, id est $\mathrm{MC} = \frac{(4a^2dx^2 - 2axdx^2).xdx\sqrt{(4a^2 - 2ax)}}{(2ax - x^2)adx^3} = \frac{(4ax - 2x^2)\sqrt{(4a^2 - 2ax)}}{2ax - x^2} = 2\sqrt{(4a^2 - 2ax)}$; atqui $4a^2 - 2ax$ est $= (2a - x) . 2a = \mathrm{FD.GD} = \mathrm{DP}^2$ (Elem. 432): ergo $\mathrm{DP} = \sqrt{(4a^2 - 2ax)}$, ac proinde $\mathrm{MC} = 2\mathrm{DP}$. Inuenitur adeo radius osculi pro quouis cycloidis puncto M, si ad punctum datum ducatur ordinata MG secans peripheriam circuli genitoris in puncto aliquo P, ad quod ducatur chorda PD, ac eiusdem duplum transferatur ad normalem MC.

216. *Coroll. 1.* Si datum punctum M fuerit in vertice cycloidis F, vbi $x = 0$, erit radius osculi $\mathrm{MC} = 2\sqrt{(4a^2 - 2ax)} = 2\sqrt{4a^2} = 4a$, hoc est, radius osculi aequabitur duplo axi, seu duplae diametro circuli genitoris, siue erit $=$ FA.

217. *Coroll. 2.*

217. *Coroll.* 2. Si fiat $x = 2a = FD$, erit $2\sqrt{(4a^2 - 2ax)} = 2\sqrt{(4a^2 - 4a^2)} = 0$, seu in puncto E radius osculi aequabitur nihilo, ac proinde euoluta cycloidis initium capit in puncto E.

218. *Coroll.* 3. Cum radius osculi FA aequetur euolutae ECA (170), perspicuum est euolutam ECA aequari duplae diametro circuli genitoris FD.

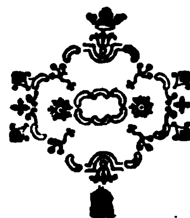
219. PROBL. *Inuestigare naturam euolutae cycloidis, seu curuae ECA.*

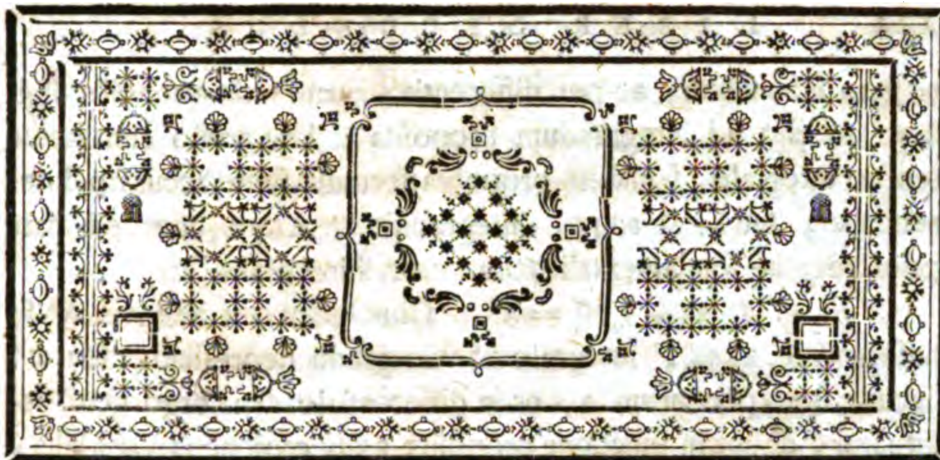
Resol. Ducatur recta AB aequalis, et parallela basi cycloidis DE, ac per punctum B recta BE parallela AF occurrens basi cycloidis in puncto E: recta hac BE tanquam diametro describatur semicirculus BKE, qui aequabitur semicirculo genitori FPD, cum sit AF = 2DF, adeoque BE = AD = DF. Porro ducatur chorda EK parallela chordae PD, erit ob angulos alternos KED, PDE aequales arcus EK aequalis arcui PD, ac proinde etiam chorda EK aequabitur chordae PD: et quia tangens ducta per arculum cycloidis Mm parallela est chordae FP (59), etiam earum perpendiculares MC et PD inter se parallelae sunt; cumque etiam rectae MG et ED parallelae sint, erit MP = HD, MH = PD (Elem. 383): ergo MH = EK; est vero MC = 2PD = 2EK (215): igitur HC = EK, et hinc EH est parallela, et aequalis rectae KC (Elem. cit.): et quia tota basis cycloidis aequatur toti peripheriae semicirculi genitoris FPD, et pars eiusdem HD = MP aequatur parti peripheriae FP, reliquum EH = KC aequabitur reliquo PD, seu EK: ergo vbicunque accipiatur punctum K, semper eadem ratiocinatione ostendetur rectam KC aequari arcui correspondenti EK. Quare euoluta ECA est semicyclois priori FME aequalis ob aequales bases, et aequales semicirculos genitores. Hinc cyclois sui euolutione se ipsam gignit.

220. *Coroll.* 1. Si radio osculi MC ducatur, alius mC infinite propinquus, et chordae DP alia Dp pariter infinite propinqua, centrisque C et D fiant arcus infinitesimi Hh et PO, arculus PO congruet cum portione chordae PF, et simul aequabitur arculo Hh ob angulos infinitesimos C et D, et radios CH et DP aequales. Iam cum sectores CMm, CHh similes sint, et CM sit = 2CH, erit etiam Mm = 2Hh = 2PO: ergo etiam summa omnium Mm, seu arcus cycloidis FM, erit dupla summae omnium PO, seu chordae FP.

221. *Coroll.* 2. Cum trapezia MHhm, MHTm solum infinitesimo spatiolo secundi gradus HTh differant, pro aequalibus haberi possunt, vti et sectores PDp, PDO: atqui trapezium MHhm est $= \frac{1}{2}$(Mm+Hh).MH (Elem. 495), seu cum sit Mm = 2Hh, et MH = CH, trapezium illud est $= \frac{3}{2}$ Hh.CH; et triangulum CHh est $= \frac{1}{2}$ Hh.CH: ergo trapezium MHhm, seu MHTm est triplum trianguli CHh, adeoque etiam trianguli DPO, siue trianguli DPp: ergo etiam summa omnium id genus trapeziorum, seu area semicycloidis FMED est tripla summae omnium eiusmodi triangulorum, seu areae semicirculi genitoris. Sed curuarum areas opportunius indagabimus libro sequenti.

FINIS LIBRI PRIMI.





LIBER SECUNDUS

De Calculo Integrali.

SECTIO PRIMA.

De Methodis Integrandi functiones differentiales.

CAPVT I.

De Regula fundamentali Calculi Integralis.

222. Functiones differentiales ex integralibus oriuntur, si exponens quantitatis variabilis ducatur in ipsam variabilem vno gradu depressam, et hoc productum multiplicetur per differentiale quantitatis variabilis, quemadmodum superiore libro vidimus: ergo vt e differentiali iterum restituatur integrale, contraria methodus adhibenda erit (15). Itaque augeatur in data functione exponens quantitatis variabilis vnitate, perque expo-

nentem ſic auctum, ac per differentiale quantitatis variabilis diuidatur functio ad integrandum propoſita: hoc pacto renaſcetur functio integralis, ſiquidem propoſita formula fuerit accurate differentialis, ſeu, vt aiunt, integrabilis. Atque haec eſt pars prior regulae fundamentalis totius calculi integralis.

E. g. $s(2xdx)$ eſt $= x^2$. Dum enim ex integrali x^2 fit differentiale $2xdx$, integrale x^2 vno gradu depreſſum, ſeu x, ducitur in exponentem 2, et in differentiale dx: ergo vt x^2 reſtituatur, debet in functione propoſita $2xdx$ exponens variabilis x vnitate augeri, vt fiat $2x^2dx$, tum per 2, et per dx, ſiue per $2dx$ diuidi. Similiter $sdx = sx^0dx$ eſt $= x$, et ſic de aliis.

223. Quia vero quantitates conſtantes iunctae variabilibus nullum habent differentiale, ſaepe fit, vt eaedem in functionibus differentialibus ad integrandum propoſitis deſiderentur, quae tamen in earum integralibus comparere debent. Quare dum ope regulae ſuperioris e data functione quapiam differentiali eiusdem integrale eruitur, certi eſſe haud poſſumus, an non in reperto integrali conſtans aliqua quantitas deſideretur, quae ſcilicet in differentiatione euanuerat.

E. g. Si ad integrandum proponatur functio differentialis $2xdx$, et ſecundum regulam paulo ante traditam inueniatur eius integrale x^2, vtique in ambiguo relinquitur, vtrum integrale repertum x^2 completum ſit, niſi forte ex adiunctis problematis completum eſſe conſtet: nam eiusdem functionis $2xdx$ integrale poteſt eſſe non ſolum x^2, ſed etiam $x^2 \pm a^2$, $x^2 \pm ab$, $c^2 + x^2$ etc. cum omnium harum quantitatum idem ſit differentiale $2xdx$.

224. Quare vt omnis haec tollatur ambiguitas, altera fundamentali regulae adiicienda eſt pars, quae verſetur circa conſtantem integrali adiiciendam. Hunc autem in modum erit procedendum. Poſtquam per priorem regulae partem inuentum eſt in-

tegrale quaesitum, ponatur in eodem quantitas variabilis aequalis nihilo, et si quidem hoc posito totum integrale euadat aequale nihilo, ita vt ex illo nihil supersit, id erit indicio repertum integrale completum, atque adeo legitimum esse: at si constans aliqua supersit quantitas, ea cum signo contrario adiicienda erit integrali inuento, quod eo pacto euadet plenum, atque completum.

Sit enim integranda functio aliqua differentialis quantitatis variabilis x, et ponamus notum esse valorem integralis completi, dum x determinatam aliquam habet magnitudinem, e. g. dum x est $= b$, sitque integrale illud completum $=$ I, integrale calculo erutum $=$ M, quantitas constans eidem adiicienda $=$ C, erit M $+$ C integrale completum, quod quaerimus. Iam dum x est $= b$, erit $M + C = I$: si ergo fiat $x = 0$, erit etiam $I = M + C = 0$, et hinc $M = -C$, et $-M = C$: ergo posito $x = 0$, quantitas constans C integrali adiicienda aequatur ei, in quam tunc abit integrale, nempe quantitati M, sed signum contrarium habet, ac proinde cum signo contrario debet integrali adiici.

Scholion. Quae de quantitatis constantis adiectione hic semel dicta sunt, semper deinceps subintelligemus, neque adiungemus reperto integrali quantitatem constantem C, nisi in iis problematis, in quibus ambiguum erit, vtrum inuentum integrale completum sit: in iis vero, in quibus posita variabili $= 0$ integrale penitus euanescit, eandem omittemus. Vt autem haec ipsa tiro plenius ipso in limine intelligat, addemus luculentum exemplum.

1) Quaeratur area APM comprehensa arcu parabolico AM, abscissa AP, et ordinata PM. Ducatur alia ordinata pm priori infinite propinqua, erit trapezium PMmp, seu rectangulum PMRp a trapezio nonnisi triangulo infinitesimo secundi gradus MRm differens, erit, inquam, elementum, seu differen- *Fig.* 70.

tiale areae quaesitae. Sit ergo parabolae parameter $= p$, abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit rectangulum PMRp = PM . Pp = ydx. Est autem ex natura parabolae $y^2 = px$, et hinc $y = \sqrt{px}$, et $ydx = dx\sqrt{px} = dxp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, cuius integrale, seu area quaesita per regulam fundamentalem est $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{px^3}$, seu loco px ponendo y^2, est $= \frac{2}{3}\sqrt{x^2y^2} = \frac{2}{3}xy$. Iam si hoc integrale completum est, seu si rite exhibet aream quaesitam APM, posito x seu AP = o, sicut area ipsa APM euanescit, ita integrale inuentum debet penitus aequari nihilo; atqui posito $x =$ o etiam $\frac{2}{3}xy$ est = o: ergo integrale hoc completum est.

2) Quaeratur area PMNQ duabus ordinatis PM, QN, arcu parabolico MN, et portione axis PQ comprehensa, sitque origo abscissarum in P, et PQ $= x$, QN $= y$, constans AP $= a$, parameter $= p$, ducta ordinata qn priori QN infinite propinqua, erit rectangulum QNrq $= ydx$ elementum areae quaesitae. Iam ex natura parabolae QN^2 = AQ . p, seu $y^2 = ap + px$, vnde $y = \sqrt{(ap + px)}$, adeoque $ydx = dx\sqrt{(ap + px)} = dx(ap + px)^{\frac{1}{2}}$. Augeatur iam exponens $\frac{1}{2}$ vnitate, vt fit $\frac{3}{2}$, ac per $\frac{3}{2}$, et per differentiale variabilis pdx diuidatur formula proposita, erit integrale per regulam fundamentalem $\frac{2}{3p}(ap + px)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{(\overline{ap+px}^2 . \overline{ap+px}^1)}}{3p} = \frac{2(ap+px)\sqrt{(ap+px)}}{3p} = \frac{2}{3}(a+x)\sqrt{(ap + px)}$. Si iam hoc integrale completum est, seu si rite exhibet aream quaesitam PMNQ, quemadmodum posito x seu PQ = o area haec penitus euanescit, ita facta eadem hypothesi integrale inuentum euanescere debet; atqui posito $x =$ o ex reperto integrali superest $\frac{2}{3}a\sqrt{ap} = \frac{2}{3}ay =$ APM, si ponatur PM $= y$: ergo vt integrale hoc penitus euanescat, debet ex eodem tolli

$\frac{2}{3} a\sqrt{ap}$, quo nihilum superat, ita vt sit $\frac{2}{3}(a+x)\sqrt{(ap+px)} - \frac{2}{3} a\sqrt{ap}$: tunc enim posito $x = 0$ penitus euanescet. Et sane euidens est ab integrali inuento $\frac{2}{3}(a+x)\sqrt{(ap+px)} = \frac{2}{3}$ AQ.QN exhiberi totam aream AQN, e qua vtique tollendum est spatium APM $= \frac{2}{3} a\sqrt{ap}$, vt habeatur area quaesita PMNQ.

3) Quaeratur eadem area PMNQ, sed posita origine abscissarum in puncto Q, ita vt fit abscissa QP $= x$, ordinata PM $= y$, constans AQ $= a$, erit AP $= a - x$, P$p = dx$, et rectangulum PMR$p = ydx$ erit elementum areae quaesitae. Iam ex natura parabolae PM^2 = AP . p, seu $y^2 = ap - px$, et $y = \sqrt{(ap - px)}$, adeoque $ydx = - dx\sqrt{(ap - px)}$, cuius integrale vt supra inuenitur $= -\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{(ap-px)}$. Si hoc integrale completum est, seu si rite exhibet aream quaesitam PMNQ, posito $x = 0$ sicut euanescit penitus area PMNQ, ita prorsus euanescere debet integrale repertum; atqui posito $x = 0$ ex integrali superest $-\frac{2}{3} a\sqrt{ap} = -\frac{2}{3}$ AQ.QN $= -$AQN, quo inuentum integrale deficit a nihilo: ergo vt euanescat, seu completum fit, debet ei addi $\frac{2}{3} a\sqrt{ap} =$ AQN, ita vt sit $= -\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{(ap-px)} + \frac{2}{3} a\sqrt{ap}$, tunc enim posito $x = 0$, penitus euanescet. Et sane perspicuum est ab integrali reperto $-\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{(ap-px)} = -\frac{2}{3}$ AP.PM exhiberi aream $-$APM, cui vtique addenda est area AQN $= \frac{2}{3} a\sqrt{ap}$, vt obtineatur area quaesita PMNQ.

Quodsi superiorem ratiocinationem ad postrema haec duo exempla adplicemus, erit in casu priore $\frac{2}{3}(a+x)\sqrt{(ap+px)} + C = I$; atqui posito $x = 0$ erit I, ac proinde etiam $\frac{2}{3}(a+x)\sqrt{(ap+px)} + C = 0$, seu $\frac{2}{3}(a+0)\sqrt{(ap+0)} + C = \frac{2}{3} a\sqrt{ap} + C = 0$, et hinc $C = -\frac{2}{3} a\sqrt{ap}$: id est posito $x = 0$ residuum ex integrali, quod est $\frac{2}{3} a\sqrt{ap}$, cum signo contrario est illa quantitas constans, quae integrali adiici debet. In casu posteriore $-\frac{2}{3}(a -$

$x)\sqrt{(ap-px)}+C=I$; sed posito $x=0$, etiam I fit $=0$: ergo etiam $-\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{(ap-px)}+C$, seu $-\frac{2}{3}a\sqrt{ap}+C=0$, adeoque $C=\frac{2}{3}a\sqrt{ap}$: id est, posito $x=0$, residuum ex integrali, quod est $-\frac{2}{3}a\sqrt{ap}$, cum signo iterum contrario est illa quantitas constans, quae integrali adiici debet.

Idem hunc quoque in modum euincitur. Sit inuentum integrale $=I$, residuum, quod facta hypothesi $x=0$ ex eodem remanet, fit $=R$. Si posito $x=0$ ex integrali, quod euanesceret, si completum esset, remanet $+R$, tunc integrale inuentum, posito $x=0$, superat nihilum quantitate R: ergo vt fiat $=0$, seu vt completum fit, debet ab eodem tolli R, seu addi $-R$. Sin autem ex eodem integrali remanet $-R$, tunc integrale inuentum, posito $x=0$, deficit a nihilo quantitate $-R$: ergo vt fiat $=0$, seu vt compleatur, debet ab eodem tolli $-R$, seu addi $+R$.

CAPVT II.

De Functionibus Differentialibus, quae ope regulae fundamentalis immediate integrari possunt.

225. Functiones differentiales, quarum integralia per regulam fundamentalem erui possunt, ad classes duas reuocantur. Aliae nimirum absque vlla praeparatione possunt integrari: in aliis praeuiae quaedam transformationes adhibendae sunt, vt eiusdem regulae ope reddantur integrabiles. De primis agemus hoc capite: illas autem, quarum praeparatio admodum operosa tironem terrere posset, aliis tractandas relinquemus, eas duntaxat in sequenti capite allaturi, quae et vsus ampliores, et transformationes habent faciliores.

1) Sit

1) Sit quantitas quaeuis differentialis incomplexa integranda.

I $\int dx = \int x^0 dx = x$.

II $\int x dx = \frac{x^2 dx}{2 dx} = \frac{1}{2} x^2$.

III $\int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1} dx}{\frac{m}{n}+1 \cdot dx} = \frac{n x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$.

2) Sit functio differentialis incomplexa per constantes complexas, vel incomplexas vtcunque multiplicata, vel diuisa.

I $\int a x^n dx = \frac{a x^{n+1} dx}{(n+1) dx} = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$.

II $\int \left(\frac{b^2 x^m dx}{nc - c^2}\right) = \frac{b^2 x^{m+1} dx}{(m+1) \cdot (nc - c^2) dx} = \frac{b^2 x^{m+1}}{(m+1) \cdot (nc - c^2)}$.

3) Sint fractiones, quarum denominator sit quaeuis potentia quantitatis variabilis ducta in constantes quascunque.

I $\int \left(\frac{x^m dx}{a^2 x^n - b^2 x^n}\right) = \int \left(\frac{x^{m-n} dx}{a^2 - b^2}\right) = \frac{x^{m-n+1}}{(m-n+1) \cdot (a^2 - b^2)}$.

II $\int \left(\frac{dx}{a x^m}\right) = \int \left(\frac{x^{-m} dx}{a}\right) = \frac{x^{-m+1}}{(-m+1) a} = \frac{1}{(-m+1) a x^{m-1}}$ (Elem. 103).

4) Sint functiones differentiales complexae, in quarum singulis terminis vnica occurrat quantitas variabilis ad quamcunque potentiam eleuata.

I $\int (2 a x^2 dx - b x^3 dx + 3 c^2 y dy) = \frac{2}{3} a x^3 - \frac{b x^4}{4} + \frac{3}{2} c^2 y^2$.

II $\int (3 a x^m dx + 2 b x^{n-2} dx - c x^r dx + 5 a y^n dy = \frac{3 a x^{m+1}}{m+1} + \frac{2 b x^{n-1}}{n-1}$

$- \frac{c x^{r+1}}{r+1} + \frac{5 a y^{n+1}}{n+1}$.

5) Adſit in praecedenti caſu denominator conſtans vtcunque complexus; aut ſi variabilem contineat, ſit incomplexus, vel ſaltem ad vnicum terminum reducibilis.

$$\text{I } \int\left(\frac{ax^m dx - b^2 x^{m-1} dx}{a^2+b^2}\right) = \int\left(\frac{ax^m dx}{a^2+b^2} - \frac{b^2 x^{m-1} dx}{a^2+b^2}\right) = \frac{ax^{m+1}}{(m+1).(a^2+b^2)} - \frac{b^2 x^m}{(a^2+b^2)m}.$$

$$\text{II } \int\left(\frac{ax^2 dx + b^3 dx}{ax^2 - bx^2}\right) = \int\left(\frac{ax^2 dx}{(a-b)x^2} + \frac{b^3 dx}{(a-b)x^2}\right) = \int\left(\frac{adx}{a-b} + \frac{b^3 x^{-2} dx}{a-b}\right) = \frac{ax}{a-b} + \frac{b^3 x^{-1}}{-1(a-b)} = \frac{ax}{a-b} + \frac{b^3}{-x(a-b)}.$$

$$\text{III } \int\left(\frac{ax^m dx - b^2 x^{m-1} dx}{x^2}\right) = \int(ax^{m-2} dx - b^2 x^{m-3} dx) = \frac{ax^{m-1}}{m-1} - \frac{b^2 x^{m-2}}{m-2}.$$

6) Sint functiones differentiales complexae totidem variabiles in ſe continentes, quot ſunt termini, ſitque quiuis terminus factum ex omnibus variabilibus vna demta, et ex differentiali eius variabilis, quae in hoc facto deeſt: inuenietur talis functionis integrale, ſi omiſſis differentialibus ducantur in ſe omnes variabiles (27, 28).

$$\text{I } \int(xdy + ydx) = xy.$$

$$\text{II } \int(yudx + xudy + xydu) = uxy.$$

$$\text{III } \int(auydx + auxdy + axydu) = auxy.$$

$$\text{IV } \int(my^n u^t x^{m-1} dx + nx^m u^t y^{n-1} dy + tx^m y^n u^{t-1} du) = u^t x^m y^n.$$

7) Si differentiale ductum ſit in aliquam potentiam quantitatis complexae vnicam variabilem continentis, ſit autem exponens potentiae quantitas integra poſitiua; eleuetur quantitas

complexa reapse ad eam potentiam, tum fiat de more integratio.

I $\int dx\,(ax+x^2)^2 = \int(a^2x^2dx + 2ax^3dx + x^4dx) = \frac{1}{3}a^2x^3 + \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{5}x^5$.

II $\int bdx\,(c^2x+fx^2+hx^3)^2 = \int(bc^4x^2dx + 2bc^2fx^3dx + 2bc^2hx^4dx + bf^2x^4dx + 2bfhx^5dx + bh^2x^6dx) = \frac{1}{3}bc^4x^3 + \frac{1}{2}bc^2fx^4 + \frac{2}{5}bc^2hx^5 + \frac{1}{3}bfhx^6 + \frac{1}{7}bh^2x^7$.

III $\int(hx^m dx.\overline{e+cx^r}^n) = \int hx^m dx.(e^n + \frac{n}{1}e^{n-1}cx^r + \frac{n.n-1}{1.2}e^{n-2}c^2x^{2r} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}e^{n-3}c^3x^{3r} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}e^{n-4}c^4x^{4r})$ etc. (Elem. 110)

$= \int(he^nx^mdx + nhe^{n-1}cx^{m+r}dx + \frac{n(n-1)}{2}he^{n-2}c^2x^{m+2r}dx + \frac{n(n-1).(n-2)}{6}he^{n-3}c^3x^{m+3r}dx + \frac{n(n-1).(n-2).(n-3)}{24}he^{n-4}c^4x^{m+4r}dx$ etc.)

$= \frac{he^nx^{m+1}}{m+1} + \frac{nhe^{n-1}cx^{m+r+1}}{m+r+1} + \frac{n(n-1)he^{n-2}c^2x^{m+2r+1}}{2(m+2r+1)} + \frac{n(n-1).(n-2)he^{n-3}c^3x^{m+3r+1}}{6(m+3r+1)} + \frac{n(n-1).(n-2).(n-3)he^{n-4}c^4x^{m+4r+1}}{24(m+4r+1)}$ etc.

8) Si in praecedente casu exponens potentiae fuerit quantitas negatiua vnitate maior, non erit necesse reapse eleuare quantitatem complexam: imo si iam eleuata fuerit, deprimenda erit ad radicem adiungendo exponenti exponentem radicis negatiuum.

I $\int dx\,(a^2+bx)^{-2} = -1\,(a^2+bx)^{-1} = \frac{-1}{a^2+bx}$.

II $\int 3dx\,(a^2+2ax+x^2)^{-2} = \int 3dx\,(a+x)^{-4} = -(a+x)^{-3} = \frac{-1}{(a+x)^3}$.

9) Si denique differentiales functiones radicales fuerint, et quantitas extra signum posita continuerit differentiale quan-

titatis variabilis ſub ſigno exſiſtentis ductum in quascunque conſtantes.

I $\int 3xdx\sqrt{(a^2+x^2)}=\int 3xdx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{3xdx(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\,.\,2xdx}=\frac{3xdx(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3xdx}$
$=(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(a^2+x^2)^3}.$

II $\int\frac{1}{2}(a^2dx+2bxdx)\sqrt{(a^2x+bx^2)}=\int\frac{1}{2}(a^2dx+2bxdx)\,.\,(a^2x+bx^2)^{\frac{1}{2}}$
$=\frac{\frac{1}{2}(a^2dx+2bxdx)\,.\,(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}(a^2dx+2bxdx)}=\frac{1}{3}(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{(a^2x+bx^2)^3}.$

III $\int\frac{2}{3}(a^2dy+2bydy)\sqrt[3]{(a^2y+by^2)^2}=\int\frac{2}{3}(a^2dy+2bydy)\,.\,(a^2y+by^2)^{\frac{2}{3}}$
$=\frac{\frac{2}{3}(a^2dy+2bydy)\,.\,(a^2y+by^2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}(a^2dy+2bydy)}=\frac{2}{5}(a^2y+by^2)^{\frac{5}{3}}=\frac{2}{5}\sqrt[3]{(a^2y+by^2)^5}.$

IV $\int(dx+dy)\sqrt{(x+y)}=\int(dx+dy)\,.\,(x+y)^{\frac{1}{2}}=\frac{(dx+dy)\,.\,(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}(dx+dy)}$
$=\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{(x+y)^3}.$

V $\int\left(\frac{x^3dy+3yx^2dx+3xy^2dy+y^3dx}{2\sqrt{(xy^3+x^3y)}}\right)=\int\frac{1}{2}(x^3dy+3yx^2dx+3xy^2dy+y^3dx).(xy^3$
$+x^3y)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(x^3dy+3yx^2dx+3xy^2dy+y^3dx)\,.\,\sqrt{(xy^3+x^3y)}}{(x^3dy+3yx^2dx+3xy^2dy+y^3dx)}=\sqrt{(xy^3+x^3y)}.$

VI $\int(xdy+ydx+2ydy)\sqrt[m]{(xy+y^2)^n}=\int(xdy+ydx+2ydy)\,.\,(xy+y^2)^{\frac{n}{m}}$
$=\frac{(xdy+ydx+2ydy)\,.\,(xy+y^2)^{\frac{n}{m}+1}}{(\frac{n}{m}+1)\,.\,(xdy+ydx+2ydy)}=\frac{m}{m+n}(xy+y^2)^{\frac{m+n}{m}}.$

VII $\int\left(\frac{xdy+ydx+2ydy}{\sqrt[m]{(xy+y^2)^n}}\right)=\int(xdy+ydx+2ydy)\,.\,(xy+y^2)^{-\frac{n}{m}}=\frac{m}{m-n}(xy+y^2)^{\frac{m+n}{m}}$

Scholion. Si occurrant fractiones a radicalibus liberae, quarum numerator ſit differentiale denominatoris, vel eius multiplum,

aut submultiplum, nequit integrale erui ope regulae fundamentalis. E. g. Si quaeratur $\int \frac{adx}{x} = \int ax^{-1}dx$, secundum datam regulam esset $\int ax^{-1}dx = \frac{ax^0}{0} = \frac{a}{0} = \infty$. Functiones huius generis continent differentialia logarithmica, de quibus infra agemus ex proposito.

CAPVT III.

De Functionibus Differentialibus, quae per regulam fundamentalem ope transformationum integrantur.

226. Si functio differentialis signo radicali affecta sit, seu si pro exponente habeat fractionem, sit autem extra signum differentiale quantitatis variabilis sub signo positae vtcunque per constantes multiplicatum; poterit equidem per ea, quae in superioribus dicta sunt, integrari; facilius tamen peragetur integratio ope sequentis transformationis.

1) Tota functio sub signo posita fiat aequalis vni duntaxat variabili e. g. u, ac aequatio inde genita differentietur.

2) In functione proposita pro x, dx, vel pro y, dy etc. substituantur eorum valores per u, et du expressi: hoc pacto obtinebitur functio simplicior a radicali libera, integranda ope regulae fundamentalis.

3) Peracta integratione restituantur iterum valores quantitatis u expressi per x, vel per y etc. et habebitur integrale quaesitum.

EXEMPLA.

I. Sit integranda functio $adx\sqrt{(ax-a^2)}$. Fiat $\sqrt{(ax-a^2)} = u$, erit $ax - a^2 = u^2$, et $x = \frac{u^2+a^2}{a}$, $dx = \frac{2udu}{a}$: his in data functione substitutis erit $\int 2u^2du = \frac{2}{3}u^3$; reponendo pro u^3 valorem $\sqrt{(ax-a^2)^3}$, erit integrale quaesitum $= \frac{2}{3}(ax-a^2)^{\frac{3}{2}}$. Similiter $\int\frac{adx}{\sqrt{(ax-a^2)}} = \int adx(ax-a^2)^{-\frac{1}{2}} = \int u^{-\frac{1}{2}}du = 2u^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(ax-a^2)}$.

II Sit integranda functio $xdx\sqrt[4]{(a-x)}$. Fiat $\sqrt[4]{(a-x)} = u$, erit $a - x = u^4$, $x = a - u^4$, $dx = -4u^3du$: his substitutis erit integrale functionis propositae $= \int(-4au^4du + 4u^8du) = -\frac{4}{5}au^5 + \frac{4}{9}u^9$; ac reponendo valorem de u erit integrale quaesitum $= -\frac{4}{5}a(a-x)^{\frac{5}{4}} + \frac{4}{9}(a-x)^{\frac{9}{4}}$. Similiter si quaeratur $\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(a-x)}} = \int xdx(a-x)^{-\frac{1}{4}}$, fiat $(a-x)^{-\frac{1}{4}} = u^{-\frac{1}{4}}$, erit $a-x = u$, $x = a - u$, $dx = -du$: quibus valoribus substitutis erit integrale quaesitum $= \int(-au^{-\frac{1}{4}}du + u^{\frac{3}{4}}du) = -\frac{4}{3}au^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{7}u^{\frac{7}{4}} = -\frac{4}{3}a(a-x)^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{7}(a-x)^{\frac{7}{4}}$.

III Sit integranda functio $xdx\sqrt{(a+x)^3}$. Fiat $\sqrt{(a+x)^3} = u$, erit $(a+x)^3 = u^2$, et $a + x = u^{\frac{2}{3}}$, vnde $x = u^{\frac{2}{3}} - a$, $dx = \frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}-1}du$: quibus substitutis erit integrale quaesitum $= \int(u^{\frac{2}{3}} - a).\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}}du = \int(\frac{2}{3}u^{\frac{4}{3}}du - \frac{2}{3}au^{\frac{2}{3}}du) = \frac{6}{21}u^{\frac{7}{3}} - \frac{6}{15}au^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{2}{5}au^{\frac{5}{3}}$: ac reponendo valorem de u erit integrale quaesi-

tum $= \frac{2}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{1}a(a+x)^{\frac{1}{2}}$. Eodem modo $\int\left(\frac{xdx}{\sqrt{(a+x)^3}}\right) = \int xdx\,(a+x)^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{(a+x)} + \frac{2a}{\sqrt{(a+x)}}$.

IV Sit integranda functio $(2adx - 4xdx)\sqrt{(ax - x^2)}$. Fiat $\sqrt{(ax - x^2)} = u$, erit $ax - x^2 = u^2$, et hinc $adx - 2xdx = 2udu$: his substitutis erit integrale functionis propositae $= \int 4u^2du = \frac{4}{3}u^3$: reponendo valorem de u erit integrale quaesitum $\frac{4}{3}(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$. Similiter $\int\left(\frac{2adx - 4xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}}\right) = \int(2adx - 4xdx).(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{(ax - x^2)}$.

V. Sit integranda functio $px^{m-1}dx\,(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}}$. Fiat $(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}} = u$, erit $(x^m + a^m)^n = u^r$, et $x^m + a^m = u^{\frac{r}{n}}$, adeoque $x^m = u^{\frac{r}{n}} - a^m$, et hinc $mx^{m-1}dx = \frac{r}{n}u^{\frac{r}{n}-1}du$; quibus valoribus substitutis erit integrale functionis propositae $= \int\left(\frac{pr}{mn}u^{\frac{r}{n}}du\right) = \frac{pr}{mr+mn}u^{\frac{r+n}{n}}$; ac reponendo valorem de u erit idem integrale $= \frac{pr}{mr+mn}(x^m+a^m).(x^m+a^m)^{\frac{n}{r}}$. Similiter $\int\frac{px^{m-1}dx}{(x^m+a^m)^{\frac{n}{r}}} = \int px^{m-1}dx\,(x^m+a^m)^{-\frac{n}{r}} = \frac{pr}{mr-mn}(x^m + a^m).(x^m + a^m)^{-\frac{n}{r}}$.

VI Sit integranda functio $x^{mn}.x^{n-1}dx.(a+bx^n)^r$, in qua m sit quantitas integra positiua, vel zerus. Fiat $a + bx^n = u$, erit $x^n = \frac{u-a}{b}$, adeoque $nx^{n-1}dx = \frac{du}{b}$, seu $x^{n-1}dx = \frac{du}{nb}$, ac $x^{mn} = \frac{(u-a)^m}{b^m}$, item $(a + bx^n)^r = u^r$: valoribus hisce substitutis

erit integrale functionis propositae $= \int \frac{du}{nb} u^r . \frac{(u-a)^m}{b^m}$. Si iam $\frac{u-a}{b}$ reapse eleuetur ad potentiam m, nascetur series finita, cuius termini ducti in $\frac{du}{nb} u^r$ erunt integrabiles ope regulae fundamentalis. E. g. Si sit $m = 3$, erit $\int \frac{du}{nb} u^r . \frac{(u-a)^m}{b^m} =$

$$\int \left(\frac{\frac{u^{r+3}du}{nb} - \frac{3au^{r+2}du}{nb} + \frac{3a^2u^{r+1}du}{nb} - \frac{a^3u^r du}{nb}}{b^3} \right) = \frac{u^{r+4}}{(r+4)nb^4} - \frac{3au^{r+3}}{(r+3)nb^4}$$

$+ \frac{3a^2u^{r+2}}{(r+2)nb^4} - \frac{a^3u^{r+1}}{(r+1)nb^4}$; ac denique reponendo valores pro u^{r+4}, u^{r+3}, u^{r+2}, u^{r+1}, erit integrale quaesitum $= \frac{(a+bx^n)^{r+4}}{(r+4)nb^4} -$ $\frac{3a(a+bx^n)^{r+3}}{(r+3)nb^4} + \frac{3a^2(a+bx^n)^{r+2}}{(r+2)nb^4} - \frac{a^3(a+bx^n)^{r+1}}{(r+1)nb^4}$.

227. Si in functionibus superioribus quantitas extra signum non contineat differentiale quantitatis sub signo exsistentis, reducendae erunt functiones ad formam superiorem hoc pacto. Quantitas extra signum posita per aliquam variabilem e. g. per x multiplicetur, et quantitas sub signo posita per eandem diuidatur, aut contra: sic enim functio ad integrandum proposita retento priore valore acquiret formam numeri praecedentis, ac integrabitur. E. g. Sit functio eo pacto transformanda $x^m(ax^n)^r$. Multiplicetur x^m per x^t, erit factum x^{m+t}: diuidatur $(ax^n)^r$ per idem $x^t = (x^{\frac{t}{r}})^r$, erit quotus $(ax^{n-\frac{t}{r}})^r$; adeoque functio proposita abibit in hanc $x^{m+t}(ax^{n-\frac{t}{r}})^r$, quae priori aequalis est. Vel diuidatur x^m per x^n, erit quotus x^{m-n}: multiplicetur $(ax^n)^r$ per idem $x^n = (x^{\frac{n}{r}})^r$, erit factum $(ax^{n+\frac{n}{r}})^r$; et hinc functio proposita abibit in hanc aequalem $x^{m-n}(ax^{n+\frac{n}{r}})^r$.

EXEM-

Exempla.

I Sit integranda functio $(a^2dx + 2x^2dx) . (a^2x^4 + x^6)^{\frac{1}{2}}$. Multiplicetur quantitas extra signum posita per x, erit factum $a^2xdx + 2x^3dx$. Diuidatur quantitas sub signo posita per idem x, seu per $\sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}$, erit quotus $(a^2x^2 + x^4)^{\frac{1}{2}}$: quare functio proposita abibit in hanc aequalem $(a^2xdx + 2x^3dx) . (a^2x^2 + x^4)^{\frac{1}{2}}$, vbi patet in quantitate extra signum posita contineri differentiale quantitatis sub signo positae, ac proinde functionem pertinere ad numerum praecedentem, esseque integrale eiusdem $= \frac{1}{3}(a^2x^2 + x^4)^{\frac{3}{2}}$.

II Sit integranda functio $(3ax^3dx + 4x^4dx) . (ax + x^2)^{\frac{1}{2}}$. Diuidatur quantitas extra signum posita per x, erit quotus $3ax^2dx + 4x^3dx$: multiplicetur quantitas sub signo exsistens per idem x, seu per $\sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}$, erit factum $= (ax^3 + x^4)^{\frac{1}{2}}$: ergo functio proposita abibit in hanc aequalem $(3ax^2dx + 4x^3dx) . (ax^3 + x^4)^{\frac{1}{2}}$, quam denuo adparet ad numerum praecedentem pertinere, esseque integrale eiusdem $= \frac{2}{3}(ax^3 + x^4)^{\frac{3}{2}}$.

III Sit integranda functio $dx(a^2x^2 + x^4)^{\frac{1}{2}}$. Multiplicetur quantitas extra signum posita per x, erit factum xdx. Diuidatur quantitas sub signo exsistens per idem x, seu per $\sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}$, erit quotus $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$: ergo functio proposita abibit in hanc aequalem $xdx(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, cuius integrale per numerum praecedentem est $= \frac{1}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}$

Scholion. Vtra e duabus quantitatibus, ſcilicet an quantitas extra ſignum, an ſub ſigno poſita debeat multiplicari, ex adiunctis functionis propoſitae erit diiudicandum. Si earum altera multiplicetur, alteram per eandem quantitatem diuidi oportere manifeſtum eſt, vt valor functionis datae retineatur.

CAPVT IV.

De Functionibus Differentialibus, quae ope ſerierum infinitarum integrantur.

228. Inter functiones differentiales ad integrandum propoſitas ſaepe occurrunt eiusmodi, quae nullis transformationibus poſſint reddi accurate integrales. Quare in huiusmodi caſibus confugiendum eſt ad adproximationes ope ſerierum infinitarum obtinendas (16 Schol).

229. Porro functiones huiusmodi vel fractiones ſunt, vel quantitates radicales: quonam vero pacto vtraeque reſoluantur in ſeries infinitas, alibi a nobis explicatum eſt (Elem. 89, 127); id adeo hic non repetemus, ſed pauca quaedam de natura harum ſerierum, deque earum in calculo integrali vſu adnotabimus.

230. Series *conuergentes* illae dicuntur, quarum termini continenter decreſcunt: *diuergentes* contra illae adpellantur, quarum termini continenter creſcunt.

231. Vt ſeries aliqua e fractione continua numeratoris per denominatorem diuiſione oriunda conuergat, maximus terminus debet eſſe primus in denominatore, ſeu in diuiſore. Reſoluatur enim fractio $\frac{\pm a}{b \pm x}$ continua diuiſione in ſeriem infinitam $\frac{\pm a}{b} \mp \frac{ax}{b^2} \pm \frac{ax^2}{b^3} \mp \frac{ax^3}{b^4} \pm \frac{ax^4}{b^5}$ etc. (Elem. 89); ſi fuerit $b > x$, potentiae $\frac{x}{b}$, $\frac{x^2}{b^2}$,

$\frac{x^3}{b^3}$, $\frac{x^4}{b^4}$ etc. decrefcent in progreffione geometrica eo citius, quo maius fuerit b, quam x: cum ergo prior feries aequetur huic $\left(\frac{\pm a}{b} \mp \frac{ax}{b^2}\right).\left(1 + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^4}{b^4} + \frac{x^6}{b^6} \text{ etc.}\right)$, patet in ea ferie quemuis fequentem terminum minorem effe praecedente, adeoque feriem conuergere.

232. *Coroll. 1.* Adparet viciffim, fi $b < x$, feriei terminos continenter crefcere, ac proinde feriem diuergere.

233. *Coroll. 2.* Cum ergo verus fractionis valor fit quotus e diuifione numeratoris per denominatorem enatus, feu fit feries, in quam fractio diuifionis ope refoluitur, vna cum refiduo per denominatorem diuifo, et hoc refiduum in ferie conuergente continenter minuatur, in diuergente augeatur, quo plures accipiuntur feriei termini, tanto propius acceditur ad verum fractionis valorem in ferie conuergente, ac tanto magis receditur in diuergente. Quare folae feries conuergentes erunt adhibendae.

234. Similiter dum quantitas quaedam radicalis in feriem infinitam refoluitur, vt feries illa conuergat, debet maximus eiusdem terminus primo loco effe. Refoluatur enim quantitas radicalis $\sqrt{(a^2 \pm x^2)}$ in feriem infinitam ope formulae generalis alibi a nobis exhibitae (Elem. 127), erit $P = a^2$, $Q = \pm \frac{x^2}{a^2}$, $m = 1$, $n = 2$; vnde

$$P^{\frac{m}{n}} = A = a^{\frac{2}{2}} = a$$

$$+\frac{m}{n} AQ = B = \tfrac{1}{2}.a.\frac{\pm x^2}{a^2} = \frac{\pm x^2}{2a}.$$

$$+\frac{m-n}{2n} BQ = C = -\tfrac{1}{4}.\frac{\pm x^2}{2a}.\frac{\pm x^2}{a^2} = -\frac{x^4}{8a^3}$$

$$+\frac{m-2n}{3n} CQ = D = -\tfrac{1}{2}.\frac{-x^4}{8a^3}.\frac{\pm x^2}{a^2} = \frac{\pm x^6}{16a^5}$$

$$+\frac{m-3n}{4n} DQ = E = -\tfrac{5}{8}.\frac{\pm x^6}{16a^5}.\frac{\pm x^2}{a^2} = -\frac{5x^8}{128a^7}$$

$$=\frac{m-4n}{5n} EQ = F = -\tfrac{7}{10}.\frac{-5x^8}{128a^7}.\frac{\pm x^2}{a^2} = \frac{\pm 7x^{10}}{256a^9} \text{ etc.}$$

Eſt adeo $\sqrt{(a^2 \pm x^2)} = a \pm \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \pm \frac{7x^{10}}{256a^9}$ etc. vbi perſpicuum eſt, ſeriem fore conuergentem, ſi a^2 ſit $> x^2$: at ſi eſſet $a^2 < x^2$, ſeries diuergeret, ac proinde tunc non $\sqrt{(a^2 \pm x^2)}$, ſed $\sqrt{(x^2 \pm a^2)}$ deberet reſolui in ſeriem $x \pm \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} \pm \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7} \pm \frac{7a^{10}}{256x^9}$ etc.

Scholion. Si quantitas radicalis complexa plures habuerit terminos, quam duos, conſideranda erit inſtar binomii, ſcilicet omnes terminos praeter primum ſpectando tanquam vnicum terminum ſecundum. E. g. Sit reſoluenda in ſeriem infinitam ope ſuperioris formulae quantitas radicalis $\sqrt[5]{(a^5 + a^4x - x^5)} = (a^5 + a^4x - x^5)^{\frac{1}{5}}$, erit $P = a^5$, $Q = \frac{a^4x - x^5}{a^5}$, $m = 1$, $n = 5$; vnde

$$P^{\frac{m}{n}} = A = a^{\frac{5}{5}} = a.$$

$$+ \frac{m}{n} AQ = B = \frac{1}{5} a . \left(\frac{a^4x - x^5}{a^5}\right) = \frac{a^4x - x^5}{5a^4}.$$

$$+ \frac{m-n}{2n} BQ = C = -\frac{2}{5} . \left(\frac{a^4x - x^5}{5a^4}\right) . \left(\frac{a^4x - x^5}{a^5}\right) = -\frac{2a^8x^2 + 4a^4x^6 - 2x^{10}}{25a^9}.$$

$$+ \frac{m-2n}{3n} CQ = D = -\frac{3}{5}\left(\frac{-2a^8x^2 + 4a^4x^6 - 2x^{10}}{25a^9}\right) . \left(\frac{a^4x - x^5}{a^5}\right) = \frac{6a^{12}x^3 - 18a^8x^7 + 18a^4x^{11} - 6x^{15}}{125a^{14}} \text{ etc.}$$

Est adeo $\sqrt[5]{(a^5 + a^4x - x^5)} = a + \frac{a^4x - x^5}{5a^4} - \frac{2a^8x^2 + 4a^4x^6 - 2x^{10}}{25a^9} + \frac{6a^{12}x^3 - 18a^8x^7 + 18a^4x^{11} - 6x^{15}}{125a^{12}}$ etc.

Si potentia quaedam indeterminata e. g. $(a + bx^n + cx^{2n})^m$ sit resoluenda in seriem infinitam ope formulae generalis (Elem. 110), habeatur a pro termino primo, $bx^n + cx^{2n}$ pro secundo, eritque

$$a^m = a^m$$

$$+ \frac{m}{1} a^{m-1} b = ma^{m-1} (bx^n + cx^{2n}).$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 = \frac{(m^2 - m)}{2} a^{m-2} (bx^n + cx^{2n})^2$$

$$+ \frac{m(m-1).(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3 = \frac{(m^3 - 3m^2 + 2m)}{6} a^{m-3} (bx^n + cx^{2n})^3.$$

$$+ \frac{m(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 = \left(\frac{m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m}{24}\right) a^{m-4} (bx^n + cx^{2n})^4 \text{ etc.}$$

Erit adeo $(a + bx^n + cx^{2n})^m = a + ma^{m-1}(bx^n + cx^{2n}) + \frac{(m^2 - m)}{2} a^{m-2}(bx^n + cx^{2n})^2 + \frac{(m^3 - 3m^2 + 2m)}{6} a^{m-3} (bx^n + cx^{2n})^3 + \frac{(m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m)}{24} a^{m-4}(bx^n + cx^{2n})^4$ etc.

235. His rite animaduersis datae quaeuis functiones differentiales ope serierum infinitarum hoc pacto integrantur.

EXEMPLA.

I Sit integranda functio $\frac{bdx}{a+x}$. Resoluatur fractio $\frac{b}{a+x}$ ope continuae diuisionis in seriem infinitam $\frac{b}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{bx^2}{a^3} - \frac{bx^3}{a^4}$ etc. (Elem. 89), cuius singulos terminos ducendo in dx erit $\frac{bdx}{a+x} = \frac{bdx}{a} - \frac{bxdx}{a^2} + \frac{bx^2dx}{a^3} - \frac{bx^3dx}{a^4}$ etc. Integrentur deinde ope regulae fundamentalis omnes termini, erit $\int(\frac{bdx}{a+x}) = \frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{2a^2} + \frac{bx^3}{3a^3} - \frac{bx^4}{4a^4}$ etc.

II. Sit integranda functio $\frac{adx}{x}$. Vt fractionis huius denominator euadat binomius, fiat $x = b + y$, erit $\frac{adx}{x} = \frac{ady}{b+y}$. Resoluatur fractio $\frac{a}{b+y}$ in seriem infinitam $\frac{a}{b} - \frac{ay}{b^2} + \frac{ay^2}{b^3} - \frac{ay^3}{b^4} + \frac{ay^4}{b^5}$ etc. ac singuli termini ducantur in dy, erit $\frac{ady}{b+y} = \frac{ady}{b} - \frac{aydy}{b^2} + \frac{ay^2dy}{b^3} - \frac{ay^3dy}{b^4} + \frac{ay^4dy}{b^5}$ etc. et singulos terminos seorsim integrando erit $\int(\frac{ady}{b+y}) = \frac{ay}{b} - \frac{ay^2}{2b^2} + \frac{ay^3}{3b^3} - \frac{ay^4}{4b^4} + \frac{ay^5}{5b^5}$ etc. denique pro y reponendo valorem $x - b$ erit $\int(\frac{adx}{x}) = \frac{a(x-b)}{b} - \frac{a(x-b)^2}{2b^2} + \frac{a(x-b)^3}{3b^3} - \frac{a(x-b)^4}{4b^4} + \frac{a(x-b)^5}{5b^5}$ etc.

III Sit integranda functio $dx \frac{c-x}{\frac{1}{2}c-x} \surd(cx - x^2)$. Resoluatur $\surd(cx - x^2)$ in seriem infinitam (Elem. 127), erit $P = cx$, $Q = \frac{-x^2}{cx}$, $m = 1$, $n = 2$, vnde

$$P^{\frac{m}{n}} = A = c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.$$

$$+\ \frac{m}{n}\,AQ = B = \tfrac{1}{2}.c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.\frac{-x^2}{cx} = -\frac{c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{2cx} = -\tfrac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}.$$

$$+\ \frac{m-n}{2n}\,BQ = C = -\tfrac{1}{4}.\left(-\tfrac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right).\frac{-x^2}{cx} = -\tfrac{1}{8}c^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}}$$

$$+\ \frac{m-2n}{3n}\,CQ = D = -\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{8}c^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}}\right).\frac{-x^2}{cx} = -\tfrac{1}{16}c^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}} \text{ etc.}$$

Adeoque $\sqrt{(cx - x^2)} = c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}c^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{16}c^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}}$ etc. Ducatur iam haec series primum in c, deinde in $-x$, ac addita serie vtraque in vnam summam erit $(c - x)\sqrt{(cx - x^2)} = c^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{8}c^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{16}c^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{7}{2}}$ etc. qua serie diuisa per $\tfrac{1}{2}c - x$, ac multiplicata per dx erit $dx\left(\frac{c-x}{\frac{1}{2}c-x}\right)\sqrt{(cx - x^2)} = 2c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx + c^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx + \tfrac{11}{4}c^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx + \tfrac{45}{8}c^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}}dx$ etc. Quare terminos omnes seorsim integrando erit $\int dx\left(\frac{c-x}{\frac{1}{2}c-x}\right)\sqrt{(cx - x^2)} = \tfrac{4}{3}c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{5}c^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{11}{14}c^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{7}{2}} + \tfrac{45}{36}c^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{9}{2}}$ etc.

IV Sit integranda functio $\frac{bdx}{\sqrt[5]{(a+x)^3}} = \frac{bdx}{(a+x)^{\frac{3}{5}}}$. Resoluatur fractio $\frac{b}{(a+x)^{\frac{3}{5}}}$ in seriem infinitam, quod fiet continuo diuidendo b per $(a+x)^{\frac{3}{5}}$, erit $\frac{b}{(a+x)^{\frac{3}{5}}} = \frac{b}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bx}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bx^2}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^3}{125a^{\frac{18}{5}}}$ etc. ac si omnes termini ducantur in dx, erit $\frac{bdx}{\sqrt[5]{(a+x)^3}} = \frac{bdx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bxdx}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bx^2dx}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^3dx}{125a^{\frac{18}{5}}}$ etc. Denique singulos terminos seor-

fim integrando erit $\int\left(\frac{bdx}{\sqrt[5]{(a+x)^2}}\right) = \frac{bx}{a^{\frac{2}{5}}} - \frac{3bx^2}{10a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bx^3}{75a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^4}{500a^{\frac{18}{5}}}$ etc.

V Sit integranda functio $dx\sqrt{(1 + a^4x^{-4})}$. Refoluatur $\sqrt{(1 + a^4x^{-4})}$ in feriem infinitam $1 + \frac{a^4}{2x^4} - \frac{a^8}{8x^8} + \frac{3a^{12}}{48x^{12}}$ etc. ac finguli termini ducantur in dx, erit $dx\sqrt{(1 + a^4x^{-4})} = dx + \frac{a^4dx}{2x^4} - \frac{a^8dx}{8x^8} + \frac{3a^{12}dx}{48x^{12}}$ etc. $= dx + \frac{a^4x^{-4}dx}{2} - \frac{a^8x^{-8}dx}{8} + \frac{3a^{12}x^{-12}dx}{48}$ etc. (Elem. 103, 105): erit ergo fingulos terminos feorfim integrando $\int dx\sqrt{(1 + a^4x^{-4})} = x + \frac{a^4x^{-3}}{2.-3} - \frac{a^8x^{-7}}{8.-7} + \frac{3a^{12}x^{-11}}{48.-11}$ etc. $= x - \frac{a^4}{6x^3} + \frac{a^8}{56x^7} - \frac{3a^{12}}{528x^{11}}$ etc.

Scholion. Si feries fuerit decrefcens in progreffione geometrica, fumma eiusdem obtineri poterit per ea, quae in Elementis de huiusmodi progreffione tradidimus. Sit enim primus eiusdem terminus $= a$, vltimus $= \omega$, exponens progreffionis $= m$, fumma omnium terminorum $= s$, erit $sam - \omega am = sa - a^2$ (Elem. 235), et hinc $a^2 - \omega am = sa - sam$, adeoque $a - am : a = a - \omega m : s$: fi ergo terminus vltimus fit infinite paruus, omiffo termino $- \omega m$ erit $a - am : a = a : s$; hoc eft, differentia termini primi et fecundi erit ad terminum primum, vt primus ad fummam omnium terminorum. In fumandis reliquis ferierum fpeciebus, nequit regula aliqua generalis ftatui, fed fumendi funt tot termini, quot fufficiunt ad valorem integralis prope verum exhibendum.

CA-

CAPVT V.

De Functionibus Differentialibus Logarithmicis.

236. *PROBL. Describere curuam logarithmicam MNO.* *Fig. 71.*

Resol. Diuidatur recta quaepiam indefinita in partes aequales AB, BC, CD etc. sumtaque BE ad arbitrium erigatur in E perpendicularis EM arbitrariae longitudinis, ducaturque recta BM. Rursus erigatur in F perpendicularis rectae BM productae occurrens in puncto N, ducaturque CN. Erigatur denuo in G perpendicularis rectae CN productae occurrens in puncto O, ac ducatur DO. Porro erigatur in H perpendicularis rectae DO productae occurrens in puncto P, et sic deinceps: curua per puncta M, N, O, P etc. ducta vocatur logarithmica.

237. *Coroll. 1.* Si partes aequales AB, BC, CD etc. concipiantur esse infinitesimae, rectae MN, NO, OP etc. erunt itidem infinitesimae, et congruent cum arcubus logarithmicae, ac proinde rectae BM, CN, DO etc. erunt tangentes, ac rectae BE, CF, DG etc. inter se ex constructione aequales, erunt subtangentes: quare subtangens in logarithmica constans est.

238. *Coroll. 2.* Sit subtangens BE $= a$, portiones axis infinitesimae, et aequales AB, BC, CD etc. $= dx$, ac ducatur recta QS axi AK parallela; sit praeterea IQ $= y$, erit RS $= dy$, ac ob triangula RQS, QFI similia erit RS : QS = IQ : FI, seu $dy : dx = y : a$, vnde $\frac{ady}{y} = dx$, quae est aequatio ad logarithmicam.

239. *Coroll. 3.* Si abscissae fuerint in proportione arithmetica, ordinatae iisdem respondentes erunt in proportione geometrica. Nam in triangulis MEB, NFB similibus est ME : NF

= BE : BF; et in triangulis NFC, OGC similibus est NF : OG = CF : CG; sed CF = BE, CG = BF: ergo NF : OG = BE : BF, et hinc ME : NF = NF : OG, et sic porro: hoc est abscissis AE, AF, AG etc. arithmetice proportionalibus respondent ordinatae ME, NF, OG etc. geometrice proportionales.

240. *Coroll. 4.* Igitur in logarithmica abscissae ea plane ratione respondent ordinatis, qua ratione in tabulis logarithmi numeris naturalibus: adeoque si ordinatae repraesentent numeros naturales, abscissae iisdem respondentes repraesentabunt numerorum naturalium logarithmos; vnde curua haec logarithmica dicta est.

Fig. 72. 241. *Coroll. 5.* Sit logarithmica MOQ, cuius ordinata AM aequalis subtangenti a sit = 1, ordinatae BN, CO, DP etc. repraesentent numeros naturales vnitate maiores 2, 3, 4 etc. ordinatae bn, co, dp etc. repraesentabunt numeros vnitate minores, seu fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. eruntque logarithmi numerorum vnitate maiorum AB, AC, AD etc. positiui; logarithmi vero fractionum Ab, Ac, Ad etc. erunt negatiui; logarithmus vnitatis AM erit = 0.

242. *Coroll. 6.* Cum ergo logarithmi fractionum negatiui Ab, Ac, Ad etc. decrescentibus fractionibus, seu ordinatis bn, co, dp etc. continenter crescant, patet logarithmum zeri, seu abscissam ordinatae infinitesimae esse = ∞.

243. *PROBL. Datam functionem Differentialem logarithmicam integrare.*

Resol. 1) Si numerator datae functionis sit differentiale denominatoris; aut differentialis multiplus, vel submultiplus, erit eiusdem integrale logarithmus denominatoris; aut eiusdem logarithmi multiplum, vel submultiplum. Sit enim logarithmicae

ſubtangens $a = 1$, abſciſſa $AB = x$, ordinata $BN = y$, erit ex natura logarithmicae $\frac{dy}{y} = dx$ (238), et hinc $\int(\frac{dy}{y}) = \int dx = x = AB$; atqui AB eſt logarithmus ordinatae BN, ſeu y: ergo $\int(\frac{dy}{y}) = ly$.

Exempla.

I $\int(\frac{2xdx}{a^2+x^2}) = l(a^2+x^2)$.

II $\int(\frac{4xdx}{a^2+x^2}) = 2l(a^2+x^2) = l\overline{(a^2+x^2)}^2$ (Elem. 242).

III $\int(\frac{xdx}{a^2+x^2}) = \frac{1}{2}l(a^2+x^2) = l\sqrt{(a^2+x^2)}$ (Elem. 243).

IV $\int(\frac{mx^{n-1}dx}{a^n+x^n}) = \frac{m}{n}l(a^n+x^n) = ml\sqrt[n]{(a^n+x^n)}$.

V $\int(\frac{adx-2xdx}{ax-x^2}) = l(ax-x^2)$.

VI $\int(\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{ax-x^2}) = \frac{1}{2}l(ax-x^2) = l\sqrt{(ax-x^2)}$.

Scholion. Ratio integrandi ex paulo ante dictis perſpicua eſt. Sit enim $a^2+x^2 = y$, erit in exemplo primo $\int(\frac{2xdx}{a^2+x^2}) = \int(\frac{dy}{y}) = ly = l(a^2+x^2)$. In exemplo ſecundo erit $\int(\frac{4xdx}{a^2+x^2}) = \int(2.\frac{dy}{y}) = 2ly = 2l(a^2+x^2)$. In exemplo tertio erit $\int(\frac{xdx}{a^2+x^2}) = \int(\frac{1}{2}.\frac{dy}{y}) = \frac{1}{2}ly = \frac{1}{2}l(a^2+x^2)$. In exemplo quarto erit $\int(\frac{mx^{n-1}dx}{a^n+x^n}) = \int(\frac{mnx^{n-1}dx}{n.(a^n+x^n)})$, vbi ſi fiat $a^n+x^n = y$, erit $\int(\frac{m}{n}.\frac{nx^{n-1}dx}{a^n+x^n}) = \int(\frac{m}{n}.\frac{dy}{y}) = \frac{m}{n}ly = \frac{m}{n}l(a^n+x^n)$, et ſic porro.

2) Si formulae occurrant paulo magis complicatae, quam vt superior methodus iis commode adplicari possit, substitutione vtendum erit hoc pacto.

EXEMPLA.

I Sit integranda functio $m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$. Fiat $lx = y$, erit $\frac{dx}{x}$, seu differentiale de lx, $= dy$, ac $(lx)^{m-1} = y^{m-1}$; quibus valoribus substitutis functio proposita abibit in hanc aequalem simpliciorem $my^{m-1}dy$, cuius integrale est $= y^m$, in quo pro y reponendo valorem lx erit integrale quaesitum $= (lx)^m$.

II Sit integranda functio $nm\ (lx^m)^{n-1}\frac{dx}{x}$. Fiat $x^m = y$, erit differentiando $mx^{m-1}dx = dy$, adeoque $dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$; erit praeterea $lx^m = ly$: valoribus hisce substitutis functio proposita abibit in hanc aequalem simpliciorem $n(ly)^{n-1}\frac{dy}{y}$, cuius integrale vt in exemplo praecedente vidimus, est $=(ly)^n$: igitur pro ly ponendo valorem lx^m, erit integrale petitum $= (lx^m)^n$.

3) Erui quoque potest alia integrandi methodus e sequenti animaduersione. Cum sit $d(xy) = xdy + ydx$ (27), erit $xy = \int xdy + \int ydx$, et hinc $\int xdy = xy - \int ydx$. Item cum sit $d(uxy) = uxdy + uydx + xydu$, (cit.), erit $uxy = \int uxdy + \int uydx + \int xydu$, et hinc $\int(xydu + uydx) = uxy - \int uxdy$, et sic deinceps. Ex hac, inquam, animaduersione sequens methodus eruitur.

Exempla.

I. Sit integranda functio $xdx \,.\, lx$. Si lx esset quantitas constans, integrale quaesitum esset $\int(xdx) \,.\, lx = \frac{x^2}{2} \,.\, lx$: quia vero lx est variabilis, deest in data functione factum ex prima variabili $\frac{x^2}{2}$ in alterius differentiale, seu deest $\frac{x^2}{2} \,.\, d(lx) = \frac{x^2}{2} \,.\, \frac{dx}{x}$: quare completa functio differentialis esset $xdx \,.\, lx + \frac{x^2}{2} \,.\, \frac{dx}{x}$, cujus integrale esset $\int(xdx \,.\, lx) + \int(\frac{x^2}{2} \,.\, \frac{dx}{x}) = \frac{x^2}{2}\, lx$: ergo integrale solius $xdx \,.\, lx$ est $= \frac{x^2}{2}\, lx - \int(\frac{x^2}{2} \,.\, \frac{dx}{x}) = \frac{x^2}{2}\, lx - \int\frac{xdx}{2} = \frac{x^2}{2}\, lx - \frac{x^2}{4}$.

II Sit integranda functio $(x^m \,.\, lx)\, dx$. Si lx esset quantitas constans, functionis propositae integrale esset $\frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, lx$; quia vero lx est variabilis, deest in proposita functione terminus $\frac{x^{m+1}}{m+1}\, dlx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, \frac{dx}{x} = \frac{x^m dx}{m+1}$: erit ergo integrale quaesitum $= \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, lx - \int(\frac{x^m dx}{m+1})$; atqui $\int(\frac{x^m dx}{m+1})$ est $= \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$: ergo integrale quaesitum est $= \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, lx - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$.

III Sit integranda functio $x^m dx\, (lx)^n$. Quoniam in hac functione deest terminus $\frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, d(lx)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, n(lx)^{n-1} \frac{dx}{x}$, erit functio completa $= x^m dx \,.\, (lx)^n + \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, n(lx)^{n-1} \frac{dx}{x}$, adeoque $\int x^m dx \,.\, (lx)^n + \int(\frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, n\,(lx)^{n-1} \frac{dx}{x}) = \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, (lx)^n$: ergo $\int x^m dx\, (lx)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, (lx)^n - \int(\frac{x^{m+1}}{m+1}) \,.\, n\,(lx)^{n-1} \frac{dx}{x} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, (lx)^n$ —

$\int(\frac{nx^m dx}{m+1} \cdot (lx)^{n-1}$; atqui $-\int(\frac{nx^m dx}{m+1} \cdot (lx)^{n-1}$ adhibita superiori ratiocinatione est $= -\frac{(nx^{m+1})}{(m+1)^2} \cdot (lx)^{n-1} + \int(\frac{n.n-1.x^m}{(m+1)^2}) \cdot (lx)^{n-2}dx$, et rursus $\int(\frac{n.n-1)x^m}{(m+1)^2} \cdot (lx)^{n-2}dx$ est $= \frac{n(n-1)x^{m+1}}{(m+1)^3} \cdot (lx)^{n-2} - \int(\frac{n.n-1.n-2}{(m+1)^3} x^m \cdot (lx)^{n-3}dx$, et sic porro.

244. *Coroll.* Si occurrat functio differentialis logarithmica huius formae $-\frac{dy}{y}$, eius integrale non solum est $-ly$, sed etiam $l(\frac{1}{y})$. Est enim fractionis logarithmus aequalis logarithmo numeratoris demto logarithmo denominatoris (Elem. 251): ergo $l(\frac{1}{y}) = l1 - ly$; sed $l1 = 0$: ergo $l(\frac{1}{y}) = -ly$.

Scholion. Quoniam in sequentibus studio breuitatis integralibus logarithmicis parum vtemur, vsum eorundem vno, alteroue exemplo in tironis gratiam hoc loco illustrabimus.

Fig. 72. 245. PROBL. *Dati cuiuscunque numeri logarithmum inuenire.*

Resol. Cogitetur descripta logarithmica MNOPQ, cuius ordinata AM aequetur subtangenti, sitque $= 1$. Si datus numerus vnitate maior sit, capiatur a dextris ordinata quaepiam CO sic se habens ad AM, vt numerus datus ad vnitatem; ac sit excessus ordinatae CO supra AM, seu numeri dati supra vnitatem $= u$, erit CO $= 1 + u$. Iam cum ordinata est y, eius abscissa, seu logarithmus est $= \int(\frac{dy}{y})$ (243): ergo logarithmus ordinatae CO, seu numeri dati $1 + u$ est $= \int(\frac{du}{1+u}) = \int(\frac{1.du}{1+u})$. Resoluatur igitur fractio $\frac{1}{1+u}$ in seriem infinitam $1 - u + u^2 - u^3 + u^4$

— u^5 etc. cuius terminis per du multiplicatis erit $\frac{1 . du}{1 + u} = du - udu + u^2du - u^3du + u^4du - u^5du$ etc. ac feorfim integrando omnes terminos erit $\int(\frac{1 . du}{1 + u}) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6$ etc. qui eft logarithmus quaefitus.

246. *Coroll.* Si numerus datus vnitate minor, feu fractio fuerit, capiatur a finiftris ordinata quaepiam co fic fe habens ad AM, vt numerus datus ad vnitatem, fitque exceffus vnitatis fupra numerum datum $= u$, erit $co = 1 - u$, ac proinde eius logarithmns $= \int(\frac{-du}{1-u}) = \int(\frac{-1 . du}{1 - u})$: refoluendo ergo fractionem $\frac{-1}{1-u}$ in feriem infinitam, ac terminos omnes per du multiplicando, et demum integrando erit $\int(\frac{-du}{1-u}) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6$ etc. qui eft logarithmus numeri dati.

247. *PROBL. Dato finu recto OR, inuenire eiusdem logarithmum.* Fig. 74.

Refol. Sit radius BC $= 1$, abfciffa CR $= u$, erit ex natura circuli OR $= \sqrt{(1 - u^2)} = \sqrt{(\overline{1 + u} . \overline{1 - u})}$. Ponamus vt fupra in figura 72 ordinatam AM aequalem fubtangenti effe radium circuli CB, adeoque $= 1$, et capiantur vtrinque duae aliae ordinatae CO $= 1 + u$, $co = 1 - u$, erit $l(1 + u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5$ etc. (245), et $l(1 - u) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{5}u^5$ etc. (246): ergo vt habeatur $l(\overline{1 + u} . \overline{1 - u})$, debent logarithmi inuenti addi (Elem. 240); vnde $l(\overline{1 + u} . \overline{1 - u}) = -\frac{2}{2}u^2 - \frac{2}{4}u^4 - \frac{2}{6}u^6 - \frac{2}{8}u^8$ etc. quare vt habeatur logarithmus radicis, feu $l\sqrt{(\overline{1 + u} . \overline{1 + u})} = l\sqrt{(1 - u^2)}$, feu logarithmus finus dati OR, debet logarithmus inuentus per expo-

nentem radicis 2 diuidi (Elem. 243): ergo logarithmus quaesitus erit $-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{8}u^8$ etc.

248. *PROBL. Data tangente BQ inuenire eiusdem logarithmum.*

Resol. Sit, vt ante, radius $BC = 1$; cum tangens arcus $45°$ aequetur radio (Elem. 452), tangens arcus maioris erit maior, minoris minor radio, seu vnitate: si ergo differentia tangentis maioris et minoris a radio sit $= u$, erit tangens arcus maioris $= 1 + u$, tangens minoris $= 1 - u$; adeoque logarithmus tangentis $1 + u$ erit $u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5$ etc. et logarithmus tangentis $1 - u$ erit $-u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{5}u^5$ etc.

SECTIO SECUNDA.

De vsu Calculi integralis in Geometria.

CAPVT I.

De vsu Calculi Integralis in quadrandis areis.

Fig. 70. 249. *PROBL. Inuenire formulam generalem pro infinitesimis arearum elementis.*

Resol. Sit abscissa $AP = x$, ordinata $PM = y$, cui ducatur alia infinite propinqua pm, et recta MR axi AQ parallela: erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$, ac spatium infinitesimum $PMmp$ erit areae APM differentiale, seu elementum; atqui hoc spatium a rectangulo $PMRp$ non differt nisi triangulo MRm infinitesimo secundi ordinis: ergo hoc rectangulum haberi potest pro elemento areae; est autem hoc rectangulum $= Pp \cdot PM = ydx$: quare ydx generatim exhibet elementum areae.

250. *Coroll.*

250. *Coroll.* Si ergo e data ad rectam, vel ad curuam aequatione eruatur valor ordinatae y, ac in formula generali reperta substituatur, facta integratione obtinebitur area quaesita, quemadmodum exempla sequentia copiose docebunt.

251. *PROBL. Inuenire aream trianguli ABC.* *Fig. 73.*

Resol. Sit AD altitudo trianguli $= a$, basis BC $= b$, abscissa quaecunque AP $= x$, eidem respondens ordinata QM $= y$, cui sit ducta alia infinite propinqua qm; erit elementum areae QMmq = QMRr $= ydx$: quare valor ordinatae y quaerendus est, et in hac formula substituendus. In triangulis ABC, AQM similibus est AD : BC = AP : QM, seu $a : b = x : y$, vnde $y = \frac{bx}{a}$, et hinc $ydx = \frac{bxdx}{a}$, cuius integrale, seu area trianguli indeterminati AQM est $= \frac{bx^2}{2a}$: si ergo pro AP ponatur AD, seu si fiat $x = a$, erit $\frac{ba^2}{2a} = \frac{1}{2}ab$ area trianguli ABC, prorsus vt in Elementis.

252. *PROBL. Inuenire aream parabolae APM.* *Fig. 70.*

Resol. Iam in superioribus (224 Schol.) inuenta a nobis fuit ea area $= \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}$ AP . PM, seu aequalis binis trientibus rectanguli ex abscissa in ordinatam.

253. *Coroll.* Cum rectangulum APMT sit = AP . PM = xy, si ab eodem tollatur APM $= \frac{2}{3}xy$, remanebit spatium parabolae externum AMT $= \frac{1}{3}xy$.

254. *PROBL. Inuenire aream circuli ADB.* *Fig. 74.*

Resol. 1) Ope dimidii segmenti BPM. Sit diameter circuli AB $= a$, abscissa BP $= x$, ordinata PM $= y = \sqrt{ax - x^2}$): erit elementum areae $ydx = dx\sqrt{(ax - x^2)}$. Resoluatur igitur $\sqrt{(ax - x^2)}$ in seriem infinitam, ac singuli termini ducantur in dx,

erit $dx\sqrt{(ax - x^2)} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{16a^{\frac{5}{2}}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}dx}{128a^{\frac{7}{2}}}$ etc. $= a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2.a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.x^{\frac{5}{2}}dx}{2.4.a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.3.x^{\frac{7}{2}}dx}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^{\frac{9}{2}}dx}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}}$ etc. ac integrando seorsim singulos terminos erit $\int dx\sqrt{(ax - x^2)}$, seu area dimidii segmenti BPM $= \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.x^{\frac{7}{2}}}{4.7.a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.3.x^{\frac{9}{2}}}{4.6.9a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^{\frac{11}{2}}}{4.6.8.11.a^{\frac{7}{2}}}$ etc. Si ergo fiat BP = BC, seu $x = \frac{1}{2}a$, habebitur quadrans circuli BCD, cuius quadruplum est area totius circuli.

2) Ope spatii CDMP duabus ordinatis CD, et MP comprehensi. Sit radius CB $= a$, abscissa CP a centro computata $= x$, ordinata PM $= y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, erit elementum areae $ydx = dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Resoluatur ergo $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ in seriem infinitam, ac singuli termini ducantur in dx, erit $dx\sqrt{(a^2 - x^2)} = adx - \frac{x^2dx}{2a} - \frac{1.x^4dx}{2.4.a^3} - \frac{1.3.x^6dx}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5.x^8dx}{2.4.6.8.a^7}$ etc. cuius integrale, seu spatium CDMP est $= ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.4.5.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^5} - \frac{1.3.5.x^9}{2.4.6.8.9.a^7}$ etc. Si ergo fiat CP = CB, seu $x = a$, erit $a^2 - \frac{a^2}{2.3} - \frac{1.a^2}{2.4.5} - \frac{1.3.a^2}{2.4.6.7} - \frac{1.3.5.a^2}{2.4.6.8.9}$ etc. quadrans circuli CDB, cuius quadruplum est area totius circuli.

3) Ope sectoris CBO. Sit denuo radius CB $= a$, ducatur tangens BT, et rectae CQ, CT sibi infinite vicinae, sitque BQ $= x$, erit QT $= dx$, CQ $= \sqrt{(CB^2 + BQ^2)} = \sqrt{(a^2 + x^2)}$. Porro si centro C describatur arcus infinitesimus QS, similia erunt triangula TSQ, QBC; vnde CQ : CB = QT : QS, seu $\sqrt{(a^2}$

$+x^2) : a = dx : QS$; quare $QS = \frac{adx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$. Eſt item ob ſectores CQS, CON ſimiles CQ : CO = QS : ON, ſeu $\sqrt{(a^2+x^2)} : a = \frac{adx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} : ON$; vnde $ON = \frac{a^2dx}{a^2+x^2}$: erit ergo ſector elementaris $CON = \frac{1}{2} ON . CO$ (Elem. 498) $= \frac{a^3dx}{2(a^2+x^2)}$. Si ergo fractio $\frac{a^3}{a^2+x^2}$. Reſoluatur in ſeriem infinitam $a - \frac{x^2}{a} + \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^6}{a^5} + \frac{x^8}{a^7}$ etc. $= \frac{a^3}{a^2} - \frac{a^3x^2}{a^4} + \frac{a^3x^4}{a^6} - \frac{a^3x^6}{a^8} + \frac{a^3x^8}{a^{10}}$ etc. ac ſinguli termini ducantur in $\frac{dx}{2}$, erit $\frac{a^3dx}{2(a^2+x^2)} = \frac{a^3dx}{2a^2} - \frac{a^3x^2dx}{2a^4} + \frac{a^3x^4dx}{2a^6} - \frac{a^3x^6dx}{2a^8} + \frac{a^3x^8dx}{2a^{10}}$ etc. cuius integrale, ſeu ſector CBO eſt $= \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10a^3} - \frac{x^7}{14a^5} + \frac{x^9}{18a^7}$ etc. Si ergo fiat BQ = CB, ſeu $x = a$, hoc eſt, ſi arcus BO ſit 45° (Elem. 452), erit idem ſector $= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{10} - \frac{a^2}{14} + \frac{a^2}{18}$ etc. cuius octuplum eſt area totius circuli.

255. *PROBL. Inuenire aream ellipſeos ADB.* *Fig. 75.*

Reſol. 1) Ope ſpatii CDMP duabus ordinatis CD et MP comprehenſi, et ope circuli axe maiori AB tanquam diametro deſcripti. Ductis ordinatis PM et *pm* infinite ſibi propinquis ſit ſemiaxis tranſuerſus $CA = a$, ſemiaxis coniugatus $CD = b$, abſciſſa CP a centro computata $= x$, ordinata $PM = y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ (Elem. 631), erit elementum areae $ydx = \frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; atqui $dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$ eſt elementum areae circuli, cuius radius eſt $= a$ (254): pendet ergo quadratura ellipſeos a quadratura circuli. Si diametro AB deſcribatur ſemicirculus AFB, et ordinatae PM, CD producantur in G et F, erit $\int \frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} =$

CDMP, et $\int dx\sqrt{(a^2 - x^2)} = $ CFGP; vnde CDMP:CFGP $= \frac{bdx}{a} : dx = bdx : adx = b : a$: id eſt, quodlibet ſpatium ellipticum duabus ordinatis comprehenſum eſt ad ſpatium circulare correſpondens, vt ſemiaxis coniugatus ad ſemiaxem transuerſum; adeoque etiam area integra ellipſeos ad aream integram circuli in eadem ratione eſt.

Cum ergo circulorum areae ſint vt quadrata radiorum, ſi radio $\sqrt{ba}$, qui ſcilicet ſit medius proportionalis inter b et a, deſcribatur circulus, erit hic circulus ad circulum AFB, vt $ab : a^2 = b : a$, ſeu vt ellipſis ADB ad eundem circulum AFB: quare circulus radio $\sqrt{ba}$ deſcriptus aequatur ellipſi ADB.

2) Ope eiusdem ſpatii CDMP. Supra inuentum eſt ſpatii huius elementum $\frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; reſoluatur ergo $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ in ſeriem infinitam $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1 . x^4}{2.4.a^3} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5.x^8}{2.4.6.8.a^7}$ etc. ac ſinguli termini ducantur in $\frac{bdx}{a}$, erit $\frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{1.bx^4dx}{2.4.a^4} - \frac{1.3.bx^6dx}{2.4.6.a^6} - \frac{1.3.5.bx^8dx}{2.4.6.8.a^8}$ etc. cuius integrale, ſeu ſpatium CDMP eſt $= bx - \frac{bx^3}{2.3.a^2} - \frac{1.bx^5}{2.4.5.a^4} - \frac{1.3.bx^7}{2.4.6.7.a^6} - \frac{1.3.5.bx^9}{2.4.6.8.9.a^8}$ etc. Si ergo fiat $x = a$, erit quadrans ellipſeos CDA $= ab - \frac{ab}{2.3} - \frac{1.ab}{2.4.5} - \frac{1.3.ab}{2.4.6.7} - \frac{1.3.5.ab}{2.4.6.8.9}$ etc. cuius quadruplum eſt area integrae ellipſeos.

3) Ope ſectoris CDN. Ducta tangente BT ducantur rectae CT, et CQ ſibi infinite propinquae, ſitque abſciſſa CH a centro computata $= x$, ordinata HN $= y$, ac centro C ducantur arcus infiniteſimi QS, et Or, erit CN $= \sqrt{(x^2 + y^2)} =$ CO; item in triangulis CHN, CBT ſimilibus eſt CH:HN=CB:BT,

ſeu $x : y = a : BT$; vnde $BT = \frac{ay}{x}$: item $CH : CB = CN : CT$, ſeu $x : a = \sqrt{(x^2 + y^2)} : CT$; vnde $CT = \frac{a\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}$. Ad haec cum creſcente abſciſſa CH decreſcat TB, ſeu $\frac{ay}{x}$, erit eius differentiale TQ negatiuum, ſeu $= \frac{-axdy + aydx}{x^2}$. Porro ob triangula TQS, TCB ſimilia eſt $CT : CB = TQ : SQ$, ſeu $\frac{a\sqrt{(x^2+y^2)}}{x} : a = \frac{-axdy + aydx}{x^2} : SQ$; adeoque $SQ = \frac{-axdy + aydx}{x\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Denique ob ſectores CQS, COr ſimiles eſt $CQ : SQ = CO$ ſeu $CN : Or$, id eſt, $\frac{a\sqrt{(x^2+y^2)}}{x} : \frac{-axdy + aydx}{x\sqrt{(x^2+y^2)}} = \sqrt{(x^2+y^2)} : Or$; vnde $Or = \frac{-xdy + ydx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$: ergo ſector elementaris $COr = \frac{1}{2} Or . CO = \frac{-xdy + ydx}{2}$. Eſt autem ex natura ellipſeos $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, ac hinc $dy = \frac{-bxdx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$: quare his valoribus ſubſtitutis erit ſector elementaris $COr = \frac{bx^2dx}{2a\sqrt{(a^2-x^2)}} + \frac{bdx\sqrt{(a^2-x^2)}}{2a}$, ſeu reducendo ad eundem denominatorem $= \frac{bx^2dx + a^2bdx - bx^2dx}{2a\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{abdx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Reſoluatur ergo denominator $2\sqrt{(a^2 - x^2)}$ in feriem infinitam $2a - \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{4a^3} - \frac{x^6}{8a^5} - \frac{5x^8}{64a^7}$ etc. ac per eam diuidatur numerator $abdx$, erit $\frac{abdx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{bdx}{2} + \frac{bx^2dx}{4a^2} + \frac{3bx^4dx}{16a^4} + \frac{5bx^6dx}{32a^6} + \frac{35bx^8dx}{256a^8}$ etc. cuius integrale, ſeu ſector CDN eſt $= \frac{bx}{2} + \frac{bx^3}{12a^2} + \frac{3bx^5}{80a^4} + \frac{5bx^7}{224a^6} + \frac{35bx^9}{2304a^8}$ etc. Si ergo fiat $x = a$, erit quadrans ellipſeos $CDB = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{12} + \frac{3ab}{80} + \frac{5ab}{224} + \frac{35ab}{2304}$ etc. cuius quadruplum eſt area totius ellipſeos.

Fig. 76. 256. PROBL. *Inuenire aream parabolicam APM, si parabola ad diametrum referatur, seu si ordinatae axi non sint perpendiculares.*

Resol. Sit parameter diametri $= p$, abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, cui ducatur alia pm infinite propinqua, ac demittatur ad diametrum perpendicularis MD, sitque ratio sinus totius ad sinum anguli MPD vt $p : m$, erit $p : m =$ PM : MD $= y :$ MD, vnde MD $= \frac{my}{p}$: quare Pp. MD $=$ PMmp $=$ PMOp $= \frac{mydx}{p}$ erit elementum areae APM; ac pro y ponendo $\sqrt{px}$ erit idem elementum $= \frac{mdx\sqrt{px}}{p}$, cuius integrale seu area APM est $=$ $\frac{2mp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3p} = \frac{2mx\sqrt{px}}{3p} = \frac{2}{3}x.\frac{my}{p} = \frac{2}{3}$ AP . MD.

Fig. 77. 257. PROBL. *Inuenire aream hyperbolicam BPM.*

Resol. 1) Abscissis a centro computatis. Sit axis transuersus AB $= 2a$, parameter $= p$, abscissa CP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura hyperbolae $y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - a^2)$ (Elem. 631, 636), seu $2ay^2 = px^2 - a^2p$; vnde $x^2 = (\frac{2ay^2 + a^2p}{p})$, et $x = \sqrt{(\frac{2ay^2 + a^2p}{p})}$. Ducatur alia ordinata pm priori infinite propinqua, item rectae DM ac dm axi AB parallelae, erit Dd $=$ MR $= dy$, et elementum DMmd $=$ DMRd $=$ DM . Dd $= xdy = dy\sqrt{(\frac{2ay^2 + a^2p}{p})}$. Iam quia quantitates constantes methodum non variant, ponamus breuitatis caussa hyperbolam esse aequilateram, seu $2a = p$, erit $xdy = dy\sqrt{(a^2 + y^2)}$. Resoluatur ergo $\sqrt{(a^2 + y^2)}$ in seriem infinitam, et singuli termini ducantur in dy, erit $dy\sqrt{(a^2 + y^2)} =$ $ady + \frac{y^2dy}{2a} - \frac{1.y^4dy}{2.4.a^3} + \frac{1.3.y^6dy}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5.y^8dy}{2.4.6.8.a^7} + \frac{1.3.5.7.y^{10}dy}{2.4.6.8.10.a^9}$

etc. cuius integrale, seu spatium CBMD est $= ay + \frac{y^3}{2.3.a} - \frac{1.y^5}{2.4.5.a^3} + \frac{1.3.y^7}{2.4.6.7.a^5} - \frac{1.3.5.y^9}{2.4.6.8.9.a^7} + \frac{1.3.5.7.y^{11}}{2.4.6.8.10.11.a^9}$ etc. quod subductum a rectangulo CDMP $= xy$ relinquit aream quaesitam BPM.

2) Abscissis a vertice B computatis. Sit axis AB $= a$, parameter $= p$, abscissa BP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura hyperbolae $y = \sqrt{\left(\frac{apx + px^2}{a}\right)}$ (Elem. 630.) $= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} . \sqrt{(ax + x^2)}$, et hinc elementum PM$mp = ydx = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} . \sqrt{(ax + x^2)}\, dx$. Resoluatur ergo $\sqrt{(ax + x^2)}$ in seriem infinitam $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2.a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.x^{\frac{5}{2}}}{2.4.a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3.x^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}} + \frac{1.3.5.7.x^{\frac{11}{2}}}{2.4.6.8.10.a^{\frac{9}{2}}}$ etc. $= a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}.x}{2a} - \frac{1.a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}.x^2}{2.4.a^2} + \frac{1.3.a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}.x^3}{2.4.6.a^3} - \frac{1.3.5.a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x^4}{2.4.6.8.a^4} + \frac{1.3.5.7.a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}.x^5}{2.4.6.8.10.a^5}$ etc. ducantur deinde omnes termini in dx, ac pro $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ ponatur $\sqrt{ax}$, et seorsim integrentur omnes termini, erit $\int dx \sqrt{(ax + x^2)} = \sqrt{ax} \left(\frac{2}{3} x + \frac{x^2}{5a} - \frac{1.x^3}{4.7.a^2} + \frac{1.3.x^4}{4.6.9.a^3} - \frac{1.3.5.x^5}{4.6.8.11.a^4} + \frac{1.3.5.7.x^6}{4.6.8.10.13.a^5}\right.$ etc.$\left.\right)$, quod ductum in $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}$ exhibebit aream quaesitam BPM.

258. **PROBL.** *Data hyperbola cuiuscunque generis ad asymptotum relata, inuenire aream NAPMO.* Fig. 78.

Resol. Sit potentia hyperbolae CD $= a$, abſciſſa AP $= x$, ordinata PM $= y$; cum aequatio ad has hyperbolas generatim ſit $y^m x^n = a^{m+n}$, ſi conſtans a ponatur $= 1$, erit $y^m = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, et hinc $y = x^{\frac{-n}{m}}$: quare elementum PM$mp = ydx = x^{\frac{-n}{m}}dx$, cuius integrale ſeu area NAPMO eſt $= \frac{m}{m-n}x^{\frac{m-n}{m}} = \frac{m}{m-n}\sqrt[m]{x^{m-n}}$, et pro x^{-n} ponendo y^m erit $= \frac{m}{m-n}\sqrt[m]{x^m y^m} = \frac{m}{m-n}xy$.

259. *Coroll. 1.* Si hyperbola communis fuerit, ſeu ſi $m = 1$, $n = 1$, erit $\frac{m}{m-n}xy = \frac{m}{0}xy = \infty$, id eſt, area NAPMO reſpectu rectanguli xy eſt infinita.

260. *Coroll. 2.* Si ſit $m > n$, erit area $\frac{m}{m-n}xy =$ NAPMO ſemper finita; adeoque et ſpatium NADO ſemper finitum erit.

261. *Coroll. 3.* Si ſit $m < n$, denominator $m - n$ negatiuus, et ſpatium PMGH ex parte oppoſita finitum erit: at ſpatium NAPMO erit quodammodo plusquam infinitum.

262. PROBL. *Data hyperbola communi ad aſymptotum relata inuenire aream MPRQ duabus ordinatis comprehenſam.*

Reſol. Sit origo abſciſſarum in P, ſitque conſtans AP $= b$, abſciſſa PR $= x$, ordinata RQ $= y$, erit ex natura hyperbolae $by + xy = a^2$, et hinc $y = \frac{a^2}{b+x}$, adeoque elementum areae quaeſitae ydx eſt $= \frac{a^2dx}{b+x}$, cuius integrale, ſeu area MPRQ adiecta conſtante C eſt $= a^2l(b+x) + C$: quia vero poſito $x = 0$ area quaeſita debet euaneſcere, erit $a^2l(b+x) + C$, ſeu $a^2lb + C = 0$; vnde $C = -a^2lb$: erit ergo completum integrale $= a^2l(b+x) - a^2lb$. Si fiat PR ſeu $x = \infty$, erit $a^2l(b+x) = \infty$, ac proinde area MPHG eſt infinita.

263. Coroll.

263. *Coroll.* Eadem area MPRQ inuenitur, fi elementum eiusdem $\frac{a^2 dx}{b+x}$ refoluatur in feriem infinitam $\frac{a^2 dx}{b} - \frac{a^2 x dx}{b^2} + \frac{a^2 x^2 dx}{b^3} - \frac{a^2 x^3 dx}{b^4}$ etc. Integrando enim fingulos terminos feorfim erit $\int\left(\frac{a^2 dx}{b+x}\right)$, feu area $MPRQ = \frac{a^2 x}{b} - \frac{a^2 x^2}{2b^2} + \frac{a^2 x^3}{3b^3} - \frac{a^2 x^4}{4b^4}$ etc.

264. *PROBL. Inuenire aream cycloidis communis ABE.* *Fig. 79.*

Refol. Sit diameter circuli genitoris $AB = a$, abfciffa $AP = x$, ordinata $PQ = y$, cui ducta alia pq infinite propinqua, ac demiffis ad tangentem AD perpendiculis QR, et qr, erit $Pp = QT = dx$, $Tq = Rr = dy$, ac elementum $RQqr = RTqr = RQ \, . \, Rr = xdy$. Eft vero $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$ (215) $= \frac{dx(a-x)}{\sqrt{x} . \sqrt{(a-x)}} = \frac{dx\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{x}}$; quo valore fubftituto erit $xdy = \frac{x dx \sqrt{(a-x)}}{\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{(ax^2 - x^3)}}{\sqrt{x}} = dx\sqrt{(ax - x^2)}$; atqui $dx\sqrt{(ax - x^2)}$ eft elementum fpatii circularis correfpondentis AMP (254): ergo $\int dx\sqrt{(ax - x^2)}$, feu fpatium cycloidis externum AQR aequatur fpatio circulari AMP, ac proinde totum fpatium externum AED aequatur toti femicirculo AMB. Porro rectangulum ABED eft factum ex BE, feu ex peripheria femicirculi AMB in diametrum AB, et hinc eft femicirculi quadruplum (Elem. 497): ergo fpatium $ABE = ABED - AED$ eft eiusdem femicirculi triplum; ac area totius cycloidis eft tripla circuli genitoris. Conf. n. 221.

265. *Coroll.* Si area AQP, cuius elementum eft $PQqp = PQTp = ydx$, ope feriei infinitae inueftiganda fit, refoluatur $dy = \frac{dx\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{(ax - x^2)}}{x}$ in feriem infinitam $\frac{a^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} -$

$\frac{1 . x^{\frac{3}{2}} dx}{2 . 4 . a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 . 3 . x^{\frac{5}{2}} dx}{2 . 4 . 6 . a^{\frac{5}{2}}}$ etc. cuius integrale $2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1 . x^{\frac{5}{2}}}{4 . 5 . a^{\frac{3}{2}}} -$, $\frac{1 . 3 . x^{\frac{7}{2}}}{4 . 6 . 7 . a^{\frac{5}{2}}}$ etc. $= y$ ductum in dx dabit elementum areae quaesitae $ydx = 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1 . x^{\frac{5}{2}} dx}{4 . 5 . a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 . 3 . x^{\frac{7}{2}} dx}{4 . 6 . 7 . a^{\frac{5}{2}}}$ etc. cuius terminos singulos seorsim integrando erit $\int ydx$, seu area AQP $=$ $\frac{4 a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{2 x^{\frac{5}{2}}}{3 . 5 . a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1 . 2 . x^{\frac{7}{2}}}{4 . 5 . 7 . a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 . 2 . 3 . x^{\frac{9}{2}}}{4 . 6 . 7 . 9 . a^{\frac{5}{2}}}$ etc. Quodsi pro x ponatur a, obtinebitur integra area ABE.

Fig. 80. 266. PROBL. *Inuenire aream inter logarithmicam BMC, et eiusdem asymptotum AD comprehensam.*

Resol. Sit subtangens logarithmicae PT $= a$, ordinata quaecunque PM $= y$, cui ducatur alia pm infinite propinqua, et recta MR asymptoto AD parallela, erit ob triangula TMP, MRm similia MP : TP $= m$R : MR, seu $y : a = dy$: MR, vnde MR $= \frac{ady}{y}$, adeoque elementum areae quaesitae PMmp = PMRp = MR . MP $= \frac{aydy}{y} = ady$, cuius integrale ay est spatium indefinitum PMCD: quare si punctum P sit in A, erit tota area ABCD $= ay =$ PT . AB.

267. *Coroll.* Si ducatur alia ordinata quaecunque QN, eodem modo inuenitur spatium indefinitum QNCD esse $=$ PT. QN. Itaque spatium inter duas ordinatas comprehensum erit $=$ PMCD $-$ QNCD $=$ PT . PM $-$ PT . QN $=$ (PM $-$ QN) PT; id est, aequabitur rectangulo ex subtangente in differentiam ordinatarum.

Fig. 81. 268. PROBL. *Inuenire aream indefinitam ABLN Tractoriae AMN.*

Resol. Si fili MT extremitas vna T constanter iuxta rectam BL incedat, altera extremitas corpus M secum trahat, describet illud corpus in plano horizontali curuam AMN, quae idcirco *Tractoria* dicitur; eritque filum MT eiusdem tangens, quae proinde constans est.

Sit iam ordinata prima AB = MT = a, ducantur ordinatae PM et pm sibi infinite propinquae, quae productae occurrant in punctis L et l rectae AE, quae ad BL parallela sit, sitque AL = BP = y, LM = x, erit $Ll = Pp = MO = Rm = dy$, MR = $Om = dx$, PM = $a - x$, $MT^2 - PM^2 = PT^2$, seu $a^2 - a^2 + 2ax - x^2 = 2ax - x^2 = PT^2$; vnde $PT = \surd(2ax - x^2)$. Porro ob triangula MRm, MPT similia erit MR : Rm = MP : PT, seu $dx : dy = a - x : \surd(2ax - x^2)$: quare $ady - xdy = dx\surd(2ax - x^2)$; atqui $ady - xdy$ = PM . Pp est elementum areae tractoriae ABPM, et si radio BA describatur quadrans circuli BAQG, erit $dx\surd(2ax - x^2) = Cc$. CQ elementum spatii AQC: ergo areae ipsae ABPM, et AQC aequales sunt: si ergo fiat LM seu AC = AB, id est $x = a$, erit area ABLN aequalis quadranti BAQG.

269. *Coroll.* Si fiat PM = t, BP = x, erit $MT^2 - PM^2 = PT^2 = a^2 - t^2$, $PT = \surd(a^2 - t^2)$, $Mm = \surd(MR^2 + Rm^2) = \surd(dx^2 + dy^2)$. Porro ob triangula MPT, MOm similia erit PM : PT = mO : MO, seu $t : \surd(a^2 - t^2) = -dt : dx$, et hinc $dx = -\frac{dt\surd(a^2 - t^2)}{t}$, cum scilicet crescente x decrescat t.

270. *PROBL. Inuenire aream curuae sinuum* amc. *Fig.* 82.

Resol. Si quadrans peripheriae circuli AHC cogitetur extendi in rectam ahc, in qua capiantur abscissae quaeuis ah, ai, ac etc. aequales arcubus AH, AI, AC etc. eriganturque ordinatae, hf, ip, cm etc. aequales sinibus correspondentibus HF, IP,

CB etc. curua per puncta f, p, m etc. transiens *curua sinuum* adpellatur.

Sit iam radius AB $= a$, arcus AH $= ah = x$, sinus eiusdem HF $= hf = y$, demissis perpendiculis HR, Ir, ac ductis radiis BH et BI, erit HR^2 = BH^2 — BR^2 $= a^2 - y^2$, et hinc HR $= \surd(a^2 - y^2)$, ac eius differentiale HO, positis FH et PI infinite sibi propinquis, erit $= \frac{ydy}{\surd(a^2 - y^2)}$, nimirum cum signo contrario, cum crescente arcu AH, ac sinu HF, decrescat HR. Ad haec in triangulis BIr, HOI rectangulis tollendo ab angulis rectis BIH, PIr communem angulum PIB, remanebunt anguli HIO, BIr aequales; ac proinde triangula similia sunt: hinc Br : BI = HO : HI, seu $y : a = \frac{ydy}{\surd(a^2 - y^2)}$: HI; vnde HI $= dx = hi = \frac{ady}{\surd(a^2 - y^2)}$: ergo elementum $hfpi = ydx = \frac{aydy}{\surd(a^2 - y^2)}$, cuius integrale seu area ahf est $= - a\surd(a^2 - y^2) + C$. Vt constans adiicienda C reperiatur, fiat $y = 0$, erit $- a\surd a^2 + C = 0$; vnde $C = a\surd a^2 = a^2$, adeoque plenum integrale, seu area ahf est $= a^2 - a\surd(a^2 - y^2)$ = ABCD — FBCG = AFGD: quare si fiat $y = a = mc$, seu HF = BC, erit area $acm = a^2$ = ABCD.

CAPVT II.

De vsu Calculi Integralis in rectificandis curuis.

271. Curuam quampiam AM *rectificare* est lineam rectam eidem aequalem inuenire.

Fig. 83. 272. PROBL. *Inuenire formulam generalem pro infinitesimis curuarum elementis.*

Resol. Sit abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, cui ducatur alia *pm* infinite propinqua, et recta MR axi AP parallela, erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$, $Mm^2 = MR^2 + mR^2 = dx^2 + dy^2$; vnde elementum curuae rectificandae Mm est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, cuius integrale exhibebit rectam curuae AM aequalem.

273. *Coroll.* Igitur e data ad curuam rectificandam aequatione eruendus est valor quantitatis dx^2, vel dy^2, et in hac formula substituendus, ac postea adhibenda integratio.

274. PROBL. *Arcum parabolae AM rectificare.*

Resol. Sit parameter parabolae $= p$, abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit $y^2 = px$, ac differentiando $2ydy = pdx$; vnde $dx = \frac{2ydy}{p}$, et $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$, quo valore in formula generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto erit elementum $Mm = \sqrt{(\frac{4y^2dy^2}{p^2} + dy^2)}$ $= \sqrt{(\frac{4y^2dy^2 + p^2dy^2}{p^2})} = \frac{dy}{p}\sqrt{(p^2 + 4y^2)}$. Resoluatur iam $\sqrt{(p^2 + 4y^2)}$ in seriem infinitam $p + \frac{2y^2}{p} - \frac{2y^4}{p^3} + \frac{4y^6}{p^5} - \frac{10y^8}{p^7}$ etc. ducanturque singuli termini in $\frac{dy}{p}$, erit $Mm = dy + \frac{2y^2dy}{p^2} - \frac{2y^4dy}{p^4} + \frac{4y^6dy}{p^6}$ $- \frac{10y^8dy}{p^8}$ etc. cuius integrale, seu arcus AM est $= y + \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{2y^5}{5p^4} + \frac{4y^7}{7p^6} - \frac{10y^9}{9p^8}$ etc.

275. *Coroll.* Si e parabolae aequatione eruatur $dy = \frac{pdx}{2y}$, et $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2} = \frac{p^2dx^2}{4px} = \frac{pdx^2}{4x}$, ac valor hic in formula generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituatur, erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + \frac{pdx^2}{4x})} =$ $\sqrt{(\frac{4xdx^2 + pdx^2}{4x})} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\sqrt{(p + 4x)}$, qui valor si resoluatur in se-

riem infinitam, ac integretur, obtinebitur rectificatio arcus AM per abſciſſam x, quemadmodum ſupra obtinebatur per ordinatam y, id quod ſemel hic adnotaſſe ſufficiat.

Fig. 84. 276. *PROBL. Rectificare arcum circuli ope ordinatarum ad diametrum.*

Reſol. 1) Abſciſſis a vertice A computatis. Sit diameter $AB = 2a$, abſciſſa $AP = x$, ordinata $PM = y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, erit differentiando $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, ac $dy^2 = \frac{a^2dx^2 - 2axdx^2 + x^2dx^2}{2ax - x^2}$, quo valore in formula generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſubſtituto erit elementum $Mm = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{a^2dx^2 - 2axdx^2 + x^2dx^2}{2ax - x^2}\right)}$, et reducendo ad eundem denominatorem erit $= \frac{\sqrt{a^2dx^2}}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = adx$ $(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Reſoluatur iam $(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in feriem infinitam more conſueto, erit in formula generali (Elem. 127) $P = 2ax$, $Q = \frac{-x^2}{2ax} = \frac{-x}{2a}$, $m = -1$, $n = 2$; adeoque

$$P^{\frac{m}{n}} = A = (2ax)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$+ \frac{m}{n} AQ = B = -\tfrac{1}{2}.(2ax)^{-\frac{1}{2}}.\frac{-x}{2a} = \frac{1.x^{\frac{1}{2}}}{2.(2a)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$+ \frac{m-n}{2n} BQ = C = -\tfrac{3}{4}.\frac{1.x^{\frac{1}{2}}}{2.(2a)^{\frac{3}{2}}}.\frac{-x}{2a} = \frac{1.3.x^{\frac{3}{2}}}{2.4.(2a)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$+ \frac{m-2n}{3n} CQ = D = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3.x^{\frac{3}{2}}}{2.4.(2a)^{\frac{5}{2}}}.\frac{-x}{2a} = \frac{1.3.5.x^{\frac{5}{2}}}{2.4.6.(2a)^{\frac{7}{2}}}.$$

$$+ \frac{m-3n}{4n} DQ = E = -\tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5.x^{\frac{5}{2}}}{2.4.6.(2a)^{\frac{7}{2}}}.\frac{-x}{2a} = \frac{1.3.5.7.x^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.8.(2a)^{\frac{9}{2}}} \text{ etc.}$$

Si ergo omnes termini ducantur in adx, erit $adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $= (2ax)^{-\frac{1}{2}}adx + \frac{1 . x^{\frac{1}{2}}dx}{2 . 2 . (2a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 . 3 . x^{\frac{3}{2}}dx}{2 . 4 . 2 . (2a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 . 3 . 5 . x^{\frac{5}{2}}dx}{2 . 4 . 6 . 2 . (2a)^{\frac{5}{2}}} +$ $\frac{1 . 3 . 5 . 7 . x^{\frac{7}{2}}dx}{2 . 4 . 6 . 8 . 2 . (2a)^{\frac{7}{2}}}$ etc. cuius integrale, seu arcus AM est $= (2ax)^{\frac{1}{2}}$ $+ \frac{1 . x^{\frac{3}{2}}}{2 . 3 . (2a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 . 3 . x^{\frac{5}{2}}}{2 . 4 . 5 . (2a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 . 3 . 5 . x^{\frac{7}{2}}}{2 . 4 . 6 . 7 . (2a)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1 . 3 . 5 . 7 . x^{\frac{9}{2}}}{2 . 4 . 6 . 8 . 9 . (2a)^{\frac{7}{2}}}$ etc. Si fiat $x = \frac{1}{2}a$, erit arcus AM $= 60°$, ac eius sextuplum erit peripheria totius circuli.

2) Abscissis a centro C computatis. Sit radius CA $= a$, abscissa CP $= x$, ordinata PM $= y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, erit $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, ac $dy^2 = \frac{x^2dx^2}{a^2 - x^2}$, quo valore in formula generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto erit elementum arcus DM $= \sqrt{(dx^2 + \frac{x^2dx^2}{a^2 - x^2})} \sqrt{(\frac{a^2dx^2 - x^2dx^2 + x^2dx^2}{a^2 - x^2})} = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = adx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Resoluatur vt supra $(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem infinitam $a^{-1} + \frac{1 . x^2}{2a^3} + \frac{1 . 3 . x^4}{2 . 4 . a^5} + \frac{1 . 3 . 5 . x^6}{2 . 4 . 6 . a^7} + \frac{1 . 3 . 5 . 7 . x^8}{2 . 4 . 6 . 8 . a^9}$ etc. et ducantur omnes termini in adx, erit $adx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = dx + \frac{1 . x^2dx}{2a^2} + \frac{1 . 3 . x^4dx}{2 . 4 . a^4} + \frac{1 . 3 . 5 . x^6dx}{2 . 4 . 6 . a^6}$ $+ \frac{1 . 3 . 5 . 7 x^8dx}{2 . 4 . 6 . 8 a^8}$ etc. cuius integrale, seu arcus DM est $= x + \frac{1 . x^3}{2 . 3 . a^2}$ $+ \frac{1 . 3 . x^5}{2 . 4 . 5 . a^4} + \frac{1 . 3 . 5 . x^7}{2 . 4 . 6 . 7 . a^6} + \frac{1 . 3 . 5 . 7 . x^9}{2 . 4 . 6 . 8 . 9 . a^8}$ etc. Si fiat $x = a$, habebitur quadrans peripheriae DA, cuius quadruplum erit tota peripheria.

Scholion. Cum in adplicatione formulae generalis ponitur $\frac{m}{n} = -\frac{1}{2}$, perinde omnino eſt, ſiue ponatur $m = -1$, et $n = 2$; ſiue $m = 1$, et $n = -2$: iidem enim naſcuntur vtroque in caſu coefficientes; nempe in primo erit $\frac{m-n}{2n} = -\frac{3}{4}$, in ſecundo $= -\frac{3}{4}$; $\frac{m-2n}{3n}$ in primo caſu erit $= -\frac{5}{6}$, in ſecundo $= -\frac{5}{6}$, et ſic porro.

277. PROBL. *Rectificare arcum circuli BF ope tangentis datae BO.*

Reſol. Sit radius BC $= 1$; tangens BO $= x$; ductis rectis CO, et CN ſibi infinite propinquis erit ON $= dx$, CO $= \sqrt{(1+x^2)}$. Porro ob triangula COB, TNO ſimilia erit CO : CB $=$ ON : OT, ſeu $\sqrt{(1+x^2)} : 1 = dx :$ OT; vnde OT $= \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$. Item ob ſectores COT, CFf ſimiles erit CO : OT $=$ CF : Ff, ſiue $\sqrt{(1+x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 :$ Ff; vnde Ff $= \frac{dx}{1+x^2}$, ſeu reſoluendo in ſeriem infinitam $= \frac{x^0 dx}{1} - \frac{x^2 dx}{1} + \frac{x^4 dx}{1} - \frac{x^6 dx}{1} + \frac{x^8 dx}{1}$ etc. cuius integrale, ſiue arcus BF eſt $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ etc. Si arcus BF ſit $= 45°$, erit eius tangens aequalis radio, ſeu $x = 1$, et tunc arcus BF $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ etc. cuius octuplum erit integra circuli peripheria.

278. PROBL. *Rectificare arcum circuli AM ope ſinus dati PM.*

Reſol. Sit, vt ante, radius AC $= 1$, abſciſſa AP $= x$, ſinus PM $= y$, erit PB $= 2 - x$, et $y^2 =$ AP . PB $= 2x - x^2$: quare differentiando erit $2ydy = 2dx - 2xdx$; vnde $dx = \frac{2ydy}{2-2x} = \frac{ydy}{1-x}$, adeoque $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{1-2x+x^2}$, et pro $2x - x^2$ ponendo

do y^2 erit $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{1-y^2}$, quo valore in formula generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto erit elementum Mm $= \sqrt{(\frac{y^2 dy^2}{1-y^2} + dy^2)} = \sqrt{(\frac{y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2}{1-y^2}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, quo valore in seriem infinitam resoluto erit elementum Mm $= dy + \frac{1 . y^2 dy}{2} + \frac{1.3.y^4dy}{2.4} + \frac{1.3.5.y^6dy}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7.y^8dy}{2.4.6.8}$ etc. cuius integrale, seu arcus AM est $= y + \frac{1.y^3}{2.3} + \frac{1.3.y^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.y^7}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7.y^9}{2.4.6.8.9}$ etc.

Scholion. Supposita peripheriae rectificatione inuenitur area circuli duplici modo. 1) Concipiatur radius AC diuisus esse in partes infinitesimas aequales, quarum vna sit Pp, ac per singula diuisionum puncta duci peripheriae concentricae PMQN, $pmqn$ etc. Sitque peripheria dati circuli $= p$, radius AC $= r$, CP $= x$, erit Pp $= dx$; ac peripheria radio CP descripta PMQN erit $= \frac{px}{r}$, quae ducta in Pp, seu in dx dabit superficiem annularem $\frac{px\,dx}{r}$, quae est elementum areae circuli: hinc eiusdem integrale $\frac{px^2}{2r}$ est area circuli indeterminati radio CP descripti: si ergo fiat CP $=$ CA, seu $x = r$, erit area dati circuli $= \frac{pr^2}{2r} = \frac{1}{2} pr$. 2) Ductis radiis CB et CD infinite sibi propinquis, erit sector infinitesimus CBD elementum areae circuli; atqui hic sector pro triangulo haberi potest: si ergo fiat arcus BD $= dx$, erit eius area $= \frac{1}{2} r dx$, cuius integrale $\frac{1}{2} rx$ erit area sectoris finiti indeterminati arcu x comprehensi: si ergo pro x ponatur p, erit $\frac{1}{2} rp$ area totius circuli, vt ante. Conf. Elem. n. 497. Fig. 85.

279. PROBL. *Rectificare arcum ellipseos DM.* Fig. 86.

Resol. Sit semiaxis transuersus AC $= a$, semiaxis coniugatus CD $= b$, abscissa CP $= x$, ordinata PM $= y$, erit $y^2 =$

$b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ (Elem. 631), et hinc differentiando $2ydy = -\frac{2b^2xdx}{a^2}$, siue $a^2ydy = -b^2xdx$, adeoque $dy = -\frac{b^2xdx}{a^2y}$, ac $dy^2 = \frac{b^4x^2dx^2}{a^4y^2}$, et pro y^2 ponendo $\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$ erit $dy^2 = \frac{a^2b^4x^2dx^2}{a^6b^2 - a^4b^2x^2} = \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(a^2-x^2)}$, quo valore in formula generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(a^2-x^2)})} = \sqrt{(\frac{a^4dx^2 - a^2x^2dx^2 + b^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2})} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$, seu reapse diuidendo primos duos numeratoris terminos per denominatorem erit $Mm = dx\sqrt{(1 + \frac{b^2x^2}{a^4 - a^2x^2})}$. Resoluatur iam more consueto hic valor in seriem infinitam, erit idem $Mm = dx + \frac{\frac{1}{2}b^2x^2dx}{a^2(a^2-x^2)} - \frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4(a^2-x^2)^2} + \frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6(a^2-x^2)^3} - \frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8(a - x^2)^4}$ etc. $= dx + \frac{\frac{1}{2}b^2x^2dx}{a^2}(a^2 - x^2)^{-1} - \frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4}(a^2 - x^2)^{-2} + \frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6}(a^2 - x^2)^{-3} - \frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8}(a^2 - x^2)^{-4}$ etc. Quodsi porro a termino secundo inchoando reducantur in series infinitas $(a^2 - x^2)^{-1}$, $(a^2 - x^2)^{-2}$, $(a^2 - x^2)^{-3}$, $(a^2 - x^2)^{-4}$ etc. ac in suos coefficientes ducantur, erit $Mm =$

$$dx$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}b^2x^2dx}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} \text{ etc.}\right)$$
$$- \frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4}\left(\frac{1}{a^4} + \frac{2x^2}{a^6} + \frac{3x^4}{a^8} + \frac{4x^6}{a^{14}} \text{ etc.}\right)$$
$$+ \frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6}\left(\frac{1}{a^6} + \frac{3x^2}{a^8} + \frac{6x^4}{a^{10}} + \frac{10x^6}{a^{12}} \text{ etc.}\right)$$
$$- \frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8}\left(\frac{1}{a^8} + \frac{4x^2}{a^{10}} + \frac{10x^4}{a^{12}} + \frac{20x^6}{a^{14}} \text{ etc.}\right)$$

Integratis iam de more singulis terminis seorsim, erit arcus $DM =$

$$x$$
$$+\frac{\frac{1}{2}b^2}{a^2}\left(\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^5}{5a^4}+\frac{x^7}{7a^6}+\frac{x^9}{9a^8}\text{ etc.}\right)$$
$$-\frac{\frac{1}{8}b^4}{a^4}\left(\frac{x^5}{5a^4}+\frac{2x^7}{7a^6}+\frac{3x^9}{9a^8}+\frac{4x^{11}}{11a^{10}}\text{ etc.}\right)$$
$$+\frac{\frac{1}{16}b^6}{a^6}\left(\frac{x^7}{7a^6}+\frac{3x^9}{9a^8}+\frac{6x^{11}}{11a^{10}}\text{ etc.}\right)$$
$$-\frac{\frac{5}{128}b^8}{a^8}\left(\frac{x^9}{9a^8}+\frac{4x^{11}}{11a^{10}}\text{ etc.}\right)$$

Denique multiplicetur quaeuis series per suum coefficientem, ac termini, in quibus eadem occurrit potentia quantitatis x, reducantur ad eundem denominatorem. E. g. termini, in quibus occurrit x^5, facta per coefficientes multiplicatione erunt $+\frac{b^2x^5}{10a^6}-\frac{b^4x^5}{40a^8}$: multiplicetur prior fractio per $4a^2$, erunt ambae reductae ad eundem denominatorem, scilicet $\frac{4a^2b^2x^5-b^4x^5}{40a^8}=\frac{(4a^2b^2-b^4)x^5}{40a^8}$; idem fiat cum terminis, in quibus occurrit x^7, x^9 etc. Erit ergo DM =

$$x$$
$$+\frac{b^2x^3}{6a^4}$$
$$+\frac{(4a^2b^2-b^4)x^5}{40a^8}$$
$$+\frac{(8a^4b^2-4a^2b^4+b^6)x^7}{112a^{12}}$$
$$+\frac{(64a^6b^2-48a^4b^4+24a^2b^6-5b^8)x^9}{9\cdot 128a^{16}}\text{ etc.}$$

280. *Coroll.* Si fiat $x=a$, obtinebitur quadrans DMA, cuius quadruplum erit integra peripheria ellipseos. Si fiat $a=b$, ellipsis abibit in circulum, eritque arcus circularis DM $= x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3\cdot a^2}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot a^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot a^6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot x^9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot a^8}$ etc. vt supra (276)

Scholion. Eadem ſeries calculo admodum prolixo obtinetur, ſi elementi $\frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ tam numerator, quam denominator ſeorſim reſoluantur in ſeries infinitas, ac prior ſeries per poſteriorem reapſe diuidatur: deinde ſeries ea diuiſione enaſcens integretur: et denique termini eandem potentiam quantitatis x continentes ad eundem denominatorem reducantur.

Fig. 87. 281. PROBL. *Rectificare arcum hyperbolae AM.*

Reſol. Sit, vt ſupra in ellipſi, ſemiaxis transuerſus $AC = a$, ſemiaxis coniugatus $CD = b$, abſciſſa $CP = x$, ordinata $PM = y$, erit $y^2 = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$ (Elem. 631), adeoque differentiando erit $2ydy = \frac{2b^2xdx}{a^2}$, et hinc $dy = \frac{b^2xdx}{a^2y}$, $dy^2 = \frac{b^4x^2dx^2}{a^4y^2}$, ac pro y^2 ponendo $\frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$ erit $dy^2 = \frac{a^2b^4x^2dx^2}{a^4b^2x^2 - a^6b^2} = \frac{b^2x^2dx^2}{a^2x^2 - a^4}$, quo valore in formula generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſubſtituto reperitur, vt ſupra, $Mm = dx\sqrt{(1 + \frac{b^2x^2}{a^2x^2 - a^4})}$, cuius integrale eadem plane methodo eruitur, quam paulo ante in ellipſi adhibuimus.

Fig. 79. 282. PROBL. *Rectificare arcum cycloidis AQ.*

Reſol. Quoniam in cycloide $dy = \frac{dx\sqrt{(a - x)}}{\sqrt{x}}$ (264), erit $dy^2 = \frac{adx^2 - xdx^2}{x}$, quo valore in formula generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſubſtituto erit elementum $Qq = \sqrt{(dx^2 + \frac{adx^2 - xdx^2}{x})} = \frac{\sqrt{adx^2}}{\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, cuius integrale, ſeu arcus AQ eſt $= 2\sqrt{ax}$; atqui chorda AM, vtpote media proportionalis inter AB et AP (Elem. 432), ſeu inter a et x, eſt $= \sqrt{ax}$: ergo arcus AQ eſt duplus chordae correſpondentis AM; et ſi fiat $x = a$, erit arcus AE duplus diametri circuli genitoris AB, ac tota cyclois erit eiusdem diametri quadrupla.

283. *PROBL. Rectificare arcum Tractoriae AM.* Fig. 81.

Resol. Sit tangens tractoriae MT $= a$, abscissa BP $= x$, ordinata PM $= t$, erit elementum Mm $\sqrt{(dx^2 + dt^2)}$, et $dx = -\frac{dt\sqrt{(a^2 - t^2)}}{t}$ (269); quare $dx^2 = \frac{a^2dt^2 - t^2dt^2}{t^2}$, quo valore in expressione elementi Mm substituto erit M$m = \sqrt{(\frac{a^2dt^2 - t^2dt^2}{t^2} + dt^2)}$ $= \sqrt{(\frac{a^2dt^2}{t^2})} = \frac{adt}{t}$, cuius integrale, seu arcus AM est $= alt$. Itaque penes asymptotum BG describatur logarithmica AHD, cuius subtangens sit AB, seu tangens tractoriae: producantur rectae OM et mR, donec occurrant logarithmicae in punctis H et h, e quibus demittantur ad asymptotum BG perpendiculares HK et hk, quae erunt aequales et parallelae ordinatis PM et pm. Sit HK $=$ PM $= t$, erit HS $=$ O$m = -dt$, BK $= -x$, dico BK aequari arcui AM. Est enim ex dictis arcus AM $= \int\frac{a.dt}{t}$, et etiam BK seu $-x$ ex natura logarithmicae est $= \int\frac{adt}{t}$.

CAPUT III.

De usu Calculi Integralis in cubandis solidis.

284. *Cubare* solidum dicimur, dum elementa infinitesima, e quibus coalescit, ope calculi integralis in unam summam cogendo soliditatem eiusdem determinamus.

285. *PROBL. Inuenire formulam generalem pro infinitesimis solidorum elementis.* Fig. 83.

Resol. Spectabimus hic solida tanquam rotatione plani cuiuspiam genita. Cogitetur ergo planum APM sua circa rectam AP, quae axis rotationis dicitur, reuolutione solidum aliquod generare, arcus AM generabit conuexam solidi superficiem,

cuius elementum erit zona annularis ab arcu infinitesimo Mm genita: cylinder vero infinitesimus, quem planum $PMmp = PMRp$ sua reuolutione gignit, erit elementum infinitesimum ipsius solidi, cuius expressio generalis isthic quaeritur.

Sit ergo ratio radii ad peripheriam circuli $r : p$, abscissa quaecunque $AP = x$, ordinata $PM = y$, cui ducta sit alia pm infinite propinqua, erit peripheria radio PM descripta $= \frac{py}{r}$, cuius dimidium in radium y ductum dabit aream circuli radio PM descripti $\frac{py^2}{2r}$, cui cylinder elementaris tanquam basi insistit: si ergo hic circulus ducatur in Pp seu in dx, scilicet in altitudinem cylindri elementaris, erit $\frac{py^2dx}{2r}$ formula generalis exhibens cylindrum elementarem solidi rotatione plani APM geniti.

286. *Coroll.* Si ergo e data plani generantis aequatione eruatur valor quantitatis y^2, ac in praesenti formula substituatur, facta de more integratione habebitur solidi geniti cubatio, sicut exempla paulo post docebunt.

Fig. 76. *Scholion.* Si ordinatae PM diametro AQ non fuerint perpendiculares, radius baseos cylindri elementaris non erit ordinata pm, sed perpendicularis mQ; nec erit cylindri altitudo Pp, sed erit FM. Sit ergo ratio sinus totius ad cosinum anguli mpQ $m : e$, erit $m : e = y : pQ$; vnde $pQ = \frac{ey}{m}$; it $m : e = mO$, seu $dy : OF$; vnde $OF = \frac{edy}{m}$, et hinc $MF = dx + \frac{edy}{m}$. Sit praeterea ratio sinus totius ad sinum anguli MPQ $m : n$, erit $m : n = y : mQ$; vnde $mQ = \frac{ny}{m}$, et peripheria eo tanquam radio descripta erit $\frac{pny}{mr}$, cuius dimidium ductum in radium $\frac{ny}{m}$ dabit basim cylindri elementaris $\frac{pn^2y^2}{2rm^2}$, quae ducta in FM, seu in $dx + \frac{edy}{m}$ dabit elemen-

tum solidi a plano AQm geniti $\frac{pn^2y^2}{2rm^2}(dx + \frac{edy}{m})$, a quo si tollatur elementum solidi a triangulo mpQ geniti $\frac{pn^2y^2}{2rm^2} \cdot \frac{edy}{m}$, remanebit $\frac{pn^2y^2dx}{2rm^2}$, quod est elementum solidi a plano APM generati.

287. *PROBL. Inuenire soliditatem coni recti.* *Fig.* 88.

Resol. Sit altitudo coni AD $= a$, diameter baseos BC $= 2b$, pars quaeuis altitudinis AI $= x$, IE diametro baseos parallela $= y$, triangulum ABC sectio coni basi perpendicularis: erit ob triangula ADB, AIE similia AD : BD $=$ AI : IE, seu $a : b = x : y$; vnde $y = \frac{bx}{a}$, et $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, quo valore in formula generali $\frac{py^2dx}{2r}$ (285) substituto erit elementum coni $= \frac{pb^2x^2dx}{2a^2r}$, cuius integrale $\frac{pb^2x^3}{6a^2r}$ est soliditas coni indeterminati, cuius sectio est AEF. Si ergo fiat AI $=$ AD, seu $x = a$, erit soliditas coni integri, cuius sectio est ABC $= \frac{pb^2a}{6r} = \frac{pb^2}{2r} \cdot \frac{1}{3}a$, quod est factum ex basi $\frac{pb^2}{2r}$ in tertiam partem altitudinis $\frac{1}{3}a$. Conf. Elem. n. 571.

288. *PROBL. Inuenire soliditatem sphaerae.* *Fig.* 89.

Resol. Sit diameter sphaerae AB $= 2r$, peripheria circuli maximi AEBDA $= p$, abscissa quaelibet AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura circuli sphaeram generantis $y^2 = 2rx - x^2$, quo valore in formula generali $\frac{py^2dx}{2r}$ substituto erit cylinder elementaris a trapezio PMmp genitus $= pxdx - \frac{px^2dx}{2r}$, cuius integrale $\frac{1}{2}px^2 - \frac{px^3}{6r}$ est portio sphaerae a plano APM genita. Si ergo fiat AP $=$ AB, seu $x = 2r$, erit soliditas integrae sphaerae a semicirculo AMB genitae $= 2pr^2 - \frac{8pr^3}{6r} = \frac{12pr^3 - 8pr^3}{6r} =$

$\frac{6pr^2 - 4pr^2}{3} = \frac{2}{3}pr^2 = 2pr \cdot \frac{1}{3}r$, quod est factum ex quadruplo circuli maximi $2pr$ in tertiam partem radii $\frac{1}{3}r$. Conf. Elem. 585.

Fig. 88. 289. *PROBL. Inuenire soliditatem corporis geniti a triangulo ABC circa axem MN basi BC parallelum rotato.*

Resol. Ductis ordinatis EF et ef infinite sibi propinquis, describet EF suo circa MN motu superficiem cauam cylindricam, quae ducta in Ii dabit cylindrum cauum infinitesimum, qui erit elementum solidi quaesiti. Sit iam basis trianguli BC $= a$, altitudo AD $= r$, abscissa AI $= x$, ordinata EF $= y$, peripheria radio AD descripta $= p$, erit peripheria radio AI descripta $= \frac{px}{r}$, quae ducta in EF, seu in y dabit superficiem cylindricam $\frac{pxy}{r}$ ab ordinata EF descriptam, quae si ducatur in $Ii = dx$, erit $\frac{pxydx}{r}$ elementum solidi quaesiti. Iam vero ob triangula ABC, AEF similia est AD : BC = AI : EF, seu $r : a = x : y$; vnde $y = \frac{ax}{r}$, quo valore substituto erit elementum paulo ante inuentum $= \frac{pax^2dx}{r^2}$, cuius integrale $\frac{pax^3}{3r^2}$ est solidum a triangulo indeterminato AEF genitum: si ergo fiat $x = r$, erit $\frac{1}{3}apr$ solidum a triangulo integro ABC generatum.

290. *Coroll.* Si altitudo trianguli AD esset $= \frac{1}{2}$ BC, seu $r = \frac{1}{2}a$, esset solidum genitum $= \frac{1}{6}pa^2$: atqui peripheria circuli maximi sphaerae habentis pro diametro basim trianguli BC $= a = 2r$ est in eo casu $= 2p$, et circulus maximus $= \frac{1}{2}ap$, ac eius quadruplum $= 2ap$, quod ductum in tertiam partem radii, seu in $\frac{1}{6}a$ dat soliditatem sphaerae $\frac{2}{6}pa^2$ (288): ergo sphaera huiusmodi est dupla solidi in eo casu geniti.

291. PROBL.

291. PROBL. *Inuenire soliditatem conoidis parabolici a parabola circa axem AB circumacta geniti.* Fig. 90.

Resol. Sit abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, parameter $= a$, erit ex natura parabolae $y^2 = ax$, quo valore in formula generali $\frac{py^2dx}{2r}$ substituto erit elementum conoidis a plano APM geniti $= \frac{apxdx}{2r}$, cuius integrale $\frac{apx^2}{4r}$ est soliditas ipsius conoidis; ac pro ax ponendo y^2 erit eadem soliditas $= \frac{pxy^2}{4r} = \frac{py^2}{2r} \cdot \frac{1}{2} x$: hoc est, soliditas cuiusuis conoidis parabolici hoc pacto geniti aequatur basi $\frac{py^2}{2r}$ ductae in dimidiam altitudinem $\frac{1}{2} x$.

292. *Coroll.* Quare cylinder, conoides, et conus eandem basim, et altitudinem habentia sunt ad se inuicem vt $\frac{py^2}{2r} . x$, $\frac{py^2}{2r} . \frac{1}{2} x$, $\frac{py^2}{2r} . \frac{1}{3} x$, seu vt 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

293. PROBL. *In eodem casu inuenire soliditatem scutellae a plano externo AFM genitae.*

Resol. Cum soliditas cylindri a rectangulo AFMP geniti sit $= \frac{py^2x}{2r}$, si ex ea tollatur soliditas conoidis paulo ante inuenta $\frac{dy^2}{2r} . \frac{1}{2} x = \frac{py^2x}{4r}$, erit $\frac{py^2x}{2r} - \frac{py^2x}{4r} = \frac{py^2x}{4r}$ soliditas scutellae. Est adeo scutella a plano externo AFM genita aequalis conoidi a plano interno APM genito: quod quidem ita esse vel inde patet, quod ambo simul constituant cylindrum, cuius dimidium est conoides.

294. PROBL. *Inuenire soliditatem conoidis parabolici, quod nascitur, dum parabola circa ordinatam BD rotatur.*

Resol. Sit axis AB $= b$, BD $= c$, abscissa quaecunque AP $= x$, eidem respondens ordinata PM $= y$, ductis ME et me sibi infinite propinquis, et axi AB parallelis, erit ME $=$ PB $=$

$b-x$, $ED = BD - PM = c-y$, peripheria radio ME descripta $= \frac{p}{r}(b-x)$, circulus eiusdem $= \frac{p}{2r}(b-x)^2$, qui si ducatur in $Ee = dy$, erit elementum solidi a plano DME geniti $= \frac{p}{2r}(b^2dy - 2bxdy + x^2dy)$. Est autem in parabola $y^2 = ax$, et hinc $x = \frac{y^2}{a}$: quare hunc valorem substituendo erit idem elementum $= \frac{p}{2r}(b^2dy - \frac{2by^2dy}{a} + \frac{y^4dy}{a^2})$, cuius integrale, seu solidum a plano DME generatum est $= \frac{p}{2r}(b^2y - \frac{2by^3}{3a} + \frac{y^5}{5a^2})$, ac pro $\frac{y^2}{a}$ reponendo x erit $= \frac{p}{2r}(b^2y - \frac{2}{3}bxy + \frac{1}{5}x^2y)$. Si ergo fiat $x = b$, et $y = c$, erit integrum conoides a plano ADB genitum $= \frac{p}{2r}(b^2c - \frac{2}{3}b^2c + \frac{1}{5}b^2c) = \frac{p}{2r}.\frac{8}{15}b^2c = \frac{pb^2c}{2r}.\frac{8}{15}$.

295. *Coroll. 1.* Cum circulus radio AB descriptus sit $= \frac{pb^2}{2r}$, erit $\frac{pb^2c}{2r}$ cylinder eandem cum conoide basim $\frac{pb^2}{2r}$, ac eandem altitudinem c habens: est ergo eiusmodi cylinder ad conoides parabolicum vt $\frac{pb^2c}{2r} : \frac{pb^2c}{2r}.\frac{8}{15} = 1 : \frac{8}{15} = 15 : 8$.

296. *Coroll. 2.* Solidum a plano parabolae externo ADG genitum obtinetur, si a cylindro $\frac{pb^2c}{2r} = \frac{15}{15}.\frac{pb^2c}{2r}$ tollatur conoides $\frac{8}{15}.\frac{pb^2c}{2r}$: erit adeo id solidum $= \frac{7}{15}.\frac{pb^2c}{2r} = \frac{7pb^2c}{30r}$.

297. PROBL. *Inuenire soliditatem conoidis parabolici, quod nascitur, dum parabola circa tangentem AG rotatur.*

Resol. Sit parameter parabolae $= a$, abscissa quaecunque $AP = x$, ordinata $PM = y$, erit circulus radio AP seu FM descriptus $= \frac{px^2}{2r}$, qui si ducatur in $Ff = dy$, erit $\frac{px^2dy}{2r}$ elementum

solidi a plano AMF geniti; ac si pro x^2 ponatur ex natura parabolae $\frac{y^4}{a^2}$, erit idem elementum $= \frac{py^4dy}{2a^2r}$, cuius integrale $\frac{py^5}{10a^2r} = \frac{pa^2x^2y}{10a^2r} = \frac{px^2y}{10r}$, ponendo scilicet a^2x^2 pro y^4, est solidum a plano AMF genitum. Si ergo fiat AP $=$ AB, seu $x = b$, PM $=$ BD, seu $y = c$, erit conoides a plano ADG generatum $= \frac{pb^2c}{10r}$, quod si a cylindro eiusdem baseos et altitudinis $\frac{pb^2c}{2r} = \frac{5pb^2c}{10r}$ subtrahatur, restabit conoides a plano ABD genitum $= \frac{4pb^2c}{10r} = \frac{2pb^2c}{5r}$.

298. *PROBL. Inuenire soliditatem sphaeroidis elliptici, quod ab ellipsi circa axem transuersum AB rotata gignitur.* *Fig. 91.*

Resol. Sit semiaxis transuersus AC $= a$, semiaxis coniugatus CD $= b$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura ellipseos $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ (Elem. 628), quo valore in formula generali $\frac{py^2dx}{2r}$ substituto erit elementum solidi a plano APM geniti $= \frac{pb^2}{2a^2r}(2axdx - x^2dx)$, cuius integrale $\frac{pb^2}{2a^2r}(ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$ est solidum ipsum ab eodem plano genitum. Si ergo fiat AP $=$ AB, seu $x = 2a$, erit $\frac{2pb^2a}{3r}$ sphaeroides ellipticum a plano ABMA genitum.

299. *Coroll.* Cum circulus semiaxe coniugato CD tanquam radio descriptus sit $= \frac{pb^2}{2r}$, erit conus habens pro basi hunc circulum, et axem maiorem AB, seu $2a$ pro altitudine $= \frac{2pb^2a}{6r}$ (287) $= \frac{pb^2a}{3r}$, ac cylinder eandem basim, et altitudinem habens $= \frac{pb^2a}{r}$ (Elem. 554): erunt ergo conus, sphaeroides, et

cylinder ad se inuicem vt $\frac{pb^2a}{3r}$, $\frac{2pb^2a}{3r}$, $\frac{pb^2a}{r}$, seu vt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, vel, vt 1, 2, 3.

Fig. 92. 300. PROBL. *Inuenire soliditatem conoidis hyperbolici, quod ab hyperbola circa axem AQ rotata gignitur.*

Resol. Sit hyperbolae parameter $= b$, semiaxis transuersus AC $= \frac{1}{2}a$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura hyperbolae $y^2 = \frac{b}{a}(ax + x^2)$ (Elem. 630.), quo valore in formula generali $\frac{py^2dx}{2r}$ substituto erit $\frac{pbdx}{2ar}(ax + x^2)$ elementum conoidis a plano APM geniti; adeoque facta integratione erit conoides ipsum $= \frac{pb}{2ar}(\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}x^3)$.

301. *Coroll.* Si abscissis a centro computatis ponatur CP $= x$, et reliqua vt ante, erit $y^2 = \frac{b}{a}(x^2 - \frac{1}{4}a^2)$, quo valore in formula generali $\frac{py^2dx}{2r}$ substituto erit elementum solidi $\frac{pbdx}{2ar}(x^2 - \frac{1}{4}a^2)$, cuius integrale, seu solidum ipsum est $= \frac{pb}{2ar}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}a^2x) + C$. Iam quia in vertice A, vbi x est $= \frac{1}{2}a$, conoides debet esse $= 0$, si in reperto integrali fiat $x = \frac{1}{2}a$, erit $\frac{pb}{2ar}(\frac{a^3}{24} - \frac{a^3}{8}) + C = 0$; vnde $C = \frac{pb}{2ar} \cdot \frac{1}{12}a^3$: ergo integrale completum, seu soliditas conoidis est $= \frac{pb}{2ar}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}a^2x) + \frac{pb}{2ar} \cdot \frac{1}{12}a^3 = \frac{pb}{2ar}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}a^2x + \frac{1}{12}a^3)$.

302. PROBL. *Inuenire soliditatem conoidis hyperbolici a plano AQN geniti interea, dum rectangulum CQND reuoluitur circa semiaxem coniugatum CD.*

Resol. Sit semiaxis transuersus AC $= a$, semiaxis coniugatus CD $= b$, abscissa quaecunque CP $= x$, ordinata PM $= y$,

erit peripheria circuli radio $EM = CP = x$ deſcripti $= \frac{px}{r}$, et ipſe circulus $= \frac{px^2}{2r}$, qui ſi ducatur in $Ee = RM = dy$, erit $\frac{px^2dy}{2r}$ elementum ſolidi a plano CEMA geniti. Eſt vero ex natura hyperbolae $y^2 = \frac{b^2x^2 - b^2a^2}{a^2}$ (Elem. 631), et hinc $x^2 = \frac{a^2y^2 + a^2b^2}{b^2}$, quo valore ſubſtituto erit elementum memorati ſolidi $= \frac{pdy}{2r} \frac{(a^2y^2 + a^2b^2)}{b^2}$, cuius integrale $\frac{p}{2r}(\frac{a^2y^3}{3b^2} + a^2y)$ erit ipſum ſolidum. Si ergo fiat $PM = QN = CD$, ſeu $y = b$, erit ſolidum a plano CDNA genitum $= \frac{2a^2bp}{3r}$, quod ſubductum a cylindro rotatione rectanguli CQND genito relinquit conoides a plano AQN genitum.

Iam vero cylinder a rectangulo CQND genitus eſt factum e baſi in altitudinem, ſeu e circulo radio DN deſcripto in CD ducto. Iam circulus radio EM deſcriptus ex dictis eſt $\frac{px^2}{2r}$, ſeu pro x^2 ponendo $\frac{a^2y^2 + a^2b^2}{b^2}$ eſt $\frac{pa^2y^2 + pa^2b^2}{2b^2r}$: ſi iam PM fiat $= QN$, ſeu $y = b$, abibit EM in DN, adeoque circulus radio DN deſcriptus, ſeu baſis cylindri erit $= \frac{pa^2b^2 + pa^2b^2}{2b^2r} = \frac{2pa^2}{2r} = \frac{pa^2}{r}$, qua ducta in altitudinem b erit cylinder $= \frac{pa^2b}{r}$, a quo ſi auferatur ſolidum a plano CDNA genitum, quod ſupra fuit $= \frac{2pa^2b}{3r}$, reſtabit conoides a plano AQN genitum $= \frac{1}{3}\frac{pa^2b}{r}$.

303. *Coroll.* Quare cylinder a rectangulo CQND, ſolidum a plano CAND, et conoides a plano AQN genita ſunt ad ſe inuicem vt $\frac{3}{3}\frac{pa^2b}{r}$, $\frac{2}{3}\frac{pa^2b}{r}$, $\frac{1}{3}\frac{pa^2b}{r}$, ſeu vt 3, 2, 1.

304. PROBL. *Inuenire ſolidum genitum a plano ATKGHA genitum interea, dum hyperbola ODG circa aſymptotum AN rotatur.* *Fig. 78.*

Resol. Sit AC $= a$, CD $= b$, abscissa quaecunque AL $= x$, ordinata LK $= y$, erit ex natura hyperbolae ad asymptotum relatae $xy = ab$, et circulus radio TK $=$ AL descriptus $= \frac{px^2}{2r}$, qui si in dy ducatur, erit $\frac{px^2dy}{2r}$ elementum solidi indeterminati a plano ATKL geniti, in quo si pro x^2 e superiore ad hyperbolam aequatione ponatur $\frac{a^2b^2}{y^2}$, fiet idem elementum $= \frac{pa^2b^2dy}{2ry^2}$, cuius integrale $\frac{pa^2b^2}{2ry}$ erit ipsum illud solidum. Si iam fiat $y = 0$, seu solidum versus G et H infinite producatur, erit solidum quaesitum $= \frac{pa^2b^2}{0} = \infty$.

305. *PROBL. In eodem casu inuenire solidum a plano NALKO genitum.*

Resol. Cum circuli radio TK $=$ AL $= x$ descripti peripheria sit $= \frac{px}{r}$, si ea ducatur in KL $= y$, erit $\frac{pxy}{r}$ superficies conuexa cylindri a plano ATKL geniti, quae si in OL $= dx$ ducatur, erit $\frac{pxydx}{r}$ soliditas cylindri caui elementaris a rectangulo infinitesimo SKLO geniti; ac si pro y ponatur ex aequatione hyperbolae $\frac{ab}{x}$, erit idem cylinder elementaris $= \frac{pabxdx}{rx} = \frac{pabdx}{r}$, cuius integrale $\frac{pabx}{r}$ est solidum quaesitum.

306. *Coroll. 1.* Quare si in solidi inuenti expressione pro ab ponatur xy, erit idem $= \frac{px^2y}{r}$: hinc cum cylinder a rectangulo ATKL genitus sit $= \frac{px^2y}{2r}$, erit solidum illud huius cylindri duplum.

307. *Coroll. 2.* Igitur excessus illius solidi supra hunc cylindrum est aequalis huic cylindro: id est, solidum a plano

NTKO infinite producto genitum aequatur cylindro, cui tanquam basi insistit.

308. *Coroll. 3.* Quodsi fiat $x = a$, adeoque $y = b$, erit cylinder $\frac{pa^2b}{2r}$ a rectangulo ABDC genitus aequalis solido sibi incumbenti a plano NBDO genito.

309. *PROBL. Inuenire solidum genitum a plano PABM interea dum logarithmica CMB circa asymptotum DA rotatur.* Fig. 80.

Resol. Sit ordinata PM aequalis subtangenti $= a$, abscissa PA $= x$, ordinata AB $= y$, erit ex natura logarithmicae $dx = \frac{ady}{y}$ (238), quo valore in formula generali $\frac{py^2dx}{2r}$ substituto erit elementum solidi quaesiti $= \frac{paydy}{2r}$, cuius integrale, seu solidum quaesitum est $= \frac{pay^2}{4r} + C$. Si iam PM abeat in AB, seu a fit $= y$, euidens est solidum a plano PABM genitum fore $= 0$, et hinc $\frac{pa^3}{4r} + C = 0$; vnde $C = -\frac{pa^3}{4r}$: ergo integrale plenum, seu solidum quaesitum est $= \frac{pay^2 - pa^3}{4r}$.

310. *Coroll. 1.* Si abscissa negatiua PQ sit $= -x$, erit differentiale eiusdem $= -dx$; et quia tunc abscissis crescentibus ordinatae decrescunt, erit etiam ordinatae QN differentiale $= -dy$, adeoque etiam in hoc casu erit $dx = \frac{ady}{y}$. At ob dx negatiuum formula generalis $\frac{py^2dx}{2r}$ tunc negatiua est; quare valore ipsius dx in eadem substituto erit elementum solidi $= -\frac{paydy}{2r}$, cuius integrale, seu solidum ipsum est $= -\frac{pay^2}{4r} + C$. Si iam QN abeat in PM, seu si fiat $y = a$, solidum a plano PQNM genitum euanescet, seu $-\frac{pa^3}{4r} + C = 0$; vnde $C = \frac{pa^3}{4r}$: ergo solidum

completum a plano PQNM genitum est $= \frac{pa^3 - pay^2}{4r}$; vbi si fiat $y = 0$, seu si solidum versus D infinite producatur, erit illud $= \frac{pa^3}{4r}$.

311. *Coroll. 2.* Si a solido $\frac{pa^3}{4r}$ nunc inuento tollatur solidum $\frac{pa^3 - pay^2}{4r}$ a plano PQNM genitum, restabit $\frac{pay^2}{4r}$, solidum videlicet genitum a plano NQDC infinite producto.

312. *Coroll. 3.* Cum cylinder, cuius baseos radius est $=$ PM $= a$, et altitudo itidem $= a$, sit $= \frac{pa^3}{2r}$, erit solidum insistens eidem basi a versus D infinite productum, erit, inquam, ad hunc talem cylindrum vt $\frac{pa^3}{4r} : \frac{pa^3}{2r} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 1 : 2$.

Fig. 81. 313. *PROBL. Inuenire solidum a plano ABPM genitum interea, dum Tractoria AMN circa asymptotum BL rotatur.*

Resol. Sit abscissa BP $= x$, ordinata PM $= y$, erit $dx = \frac{-dy\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$ (269), quo valore in formula generali $\frac{py^2 dx}{2r}$ substituto erit elementum solidi $= \frac{-pydy\sqrt{(a^2 - y^2)}}{2r}$, cuius integrale, seu solidum ipsum est $= -\frac{p}{6r}(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$, seu cum signum non mutet absolutam solidi quantitatem, quam hic quaerimus, erit id solidum $= \frac{p}{6r}(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$. Si iam fiat $y = 0$, erit solidum a plano ABLN infinite producto genitum $= \frac{pa^3}{6r}$.

314. *Coroll.* Cum soliditas hemisphaerii a quadrante AQG eadem reuolutione geniti, cuius scilicet radius AB $= a$, sit $= \frac{pa^3}{3r}$, erit solidum illud infinite productum ad hoc hemisphaerium vt $\frac{pa^3}{6r} : \frac{pa^3}{3r} = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = 1 : 2$.

CAPVT IV.

De vsu Calculi Integralis in quadrandis solidorum superficiebus.

315. *PROBL. Inuenire formulam generalem pro infinitesimis superficierum elementis.* Fig. 82.

Resol. Dum planum APM reuolutione sua circa rectam AP solidum gignit, arcus infinitesimus Mm gignit zonam quamdam annularem, quae est elementum superficiei solidi ea reuolutione geniti, cuius hic expressio generalis quaeritur. Igitur sit $AP = x$, $PM = y$, cui ducta alia pm infinite propinqua erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, qui, tanquam cylindri elementaris infinitesimi a plano $PMmp$ geniti altitudo, si ducatur in peripheriam baseos, seu in peripheriam circuli radio PM descripti $\frac{py}{r}$, erit $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ formula generalis exhibens zonam illam elementarem, seu cylindri infinitesimi superficiem (Elem. 550).

316. *Coroll.* Si ergo e data plani generantis aequatione eruatur valor quantitatis dx^2 vel dy^2, ac in praesenti formula substituatur, facta de more integratione habebitur quaesita solidi superficies.

Scholion. Si ordinatae non fuerint ad diametrum perpendiculares, radius peripheriae zonam elementarem generantis non erit pm vel PM, sed perpendicularis mQ, quo tanquam radio descripta peripheria est $= \frac{pny}{mr}$ (286 Schol). Similiter arculus Mm, in quem dicta peripheria duci debet, non est tunc $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, sed hoc pacto inuenitur. Cum sit $OF = \frac{edy}{m}$, et $MF = dx + \frac{edy}{m}$ (cit.), erit $mO^2 - OF^2 = dy^2 - \frac{e^2dy^2}{m^2} = mF^2$, et $MF^2 = dx^2 + \frac{2edxdy}{m} + \frac{e^2dy^2}{m^2}$; hinc $Mm^2 = MF^2 + mF^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}$, et $Mm = \sqrt{(dx^2}$ Fig. 76.

$+ dy^2 + \frac{2edxdy}{m})$: quare formula generalis zonam illam elementarem in hoc casu exhibens erit $\frac{pny}{rm} \surd(dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m})$.

Fig. 88. 317. *PROBL. Inuenire superficiem coni recti.*

Resol. Sint omnia vt supra (287), erit IE $= y = \frac{bx}{a}$, et hinc $dy = \frac{bdx}{a}$, ac $dy^2 = \frac{b^2dx^2}{a^2}$, quo valore in formula generali $\frac{py}{r} \surd(dx^2 + dy^2)$ substituto erit elementum superficiei quaesitae $= \frac{py}{r} \surd(\frac{a^2dx^2 + b^2dx^2}{a^2}) = \frac{pydx}{ar} \surd(a^2 + b^2)$, et si pro y ponatur $\frac{bx}{a}$, erit idem elementum $= \frac{pbxdx}{a^2r} \surd(a^2 + b^2)$, cuius integrale $\frac{pbx^2}{2a^2r} \surd(a^2 + b^2)$ est superficies coni indeterminati geniti a triangulo AEF. Si ergo fiat AI = AB, seu $x = a$, erit superficies coni totius a triangulo ABC geniti $= \frac{pb}{2r} \surd(a^2 + b^2) = \frac{pb}{2r} . AC$.

318. *Coroll. 1.* Cum ergo $\frac{bp}{2r}$ sit dimidia peripheria baseos, et AC latus coni, patet coni recti superficiem esse factum e dimidia peripheria baseos in latus coni. Conf. Elem. 563.

319. *Coroll. 2.* Superficies coni truncati a trapezio BEFC geniti obtinetur, si a superficie totius coni $\frac{pb}{2r} \surd(a^2 + b^2)$ tollatur superficies coni a triangulo AEF geniti, quae supra fuit $= \frac{pbx^2}{2a^2r} \surd(a^2 + b^2)$: est adeo superficies coni truncati $= \frac{pb}{2r} \surd(a^2 + b^2) - \frac{pbx^2}{2a^2r} \surd(a^2 + b^2) = (\frac{pb}{2r} - \frac{pbx^2}{2a^2r}) . \surd(a^2 + b^2) = \frac{(pa^2b - pbx^2)}{2a^2r} . \surd(a^2 + b^2)$, quae proinde se habet ad superficiem coni integri vt $\frac{pa^2b - pbx^2}{2a^2r} : \frac{pa^2b}{2a^2r} = a^2 - x^2 : a^2$.

320. *PROBL. Inuenire superficiem sphaerae.* *Fig.* 89.

Resol. Sit diameter sphaerae AB $= 2a$, abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, et hinc $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, ac $dy^2 = \frac{a^2dx^2 - 2axdx^2 + x^2dx^2}{2ax - x^2}$, quo valore in formula generali $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto erit elementum superficiei $= \frac{py}{r}\sqrt{(\frac{2axdx^2 - x^2dx^2 + a^2dx^2 - 2axdx^2 + x^2dx^2}{2ax - x^2}} = \frac{py}{r}\sqrt{(\frac{a^2dx^2}{2ax - x^2})} = \frac{apydx}{r\sqrt{(2ax - x^2)}}$; vbi si tam numerator, quam denominator diuidatur per $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, erit idem elementum $= \frac{apdx}{r}$, cuius integrale $\frac{apx}{r}$, est superficies segmenti indeterminati AQM. Si ergo fiat AP $=$ AC, seu $x = a$, erit $\frac{a^2p}{r}$ superficies hemisphaerii AECD, cuius duplum, seu $\frac{2a^2p}{r}$ erit superficies totius sphaerae.

321. *Coroll. 1.* Quare superficies cuiusuis segmenti sphaerae $\frac{apx}{r}$ est factum ex peripheria circuli maximi sphaerae $\frac{ap}{r}$ in segmenti altitudinem x: superficies hemisphaerii $\frac{a^2p}{r}$ est factum ex eadem peripheria in radium a: superficies denique totius sphaerae $\frac{2a^2p}{r}$ est factum ex eadem peripheria in diametrum $2a$. Conf. Elem. n. 578.

322. *Coroll. 2.* Cumque peripheria circuli genitoris sit $= \frac{ap}{r}$, erit area eiusdem $= \frac{ap}{r} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{a^2p}{2r}$, et quadruplum eiusdem $= \frac{4a^2p}{2r} = \frac{2a^2p}{r}$, ergo superficies sphaerae est quadrupla circuli genitoris, seu circuli maximi. Conf. Elem. n. 579.

Fig. 93. 323. *PROBL. Aliter inuenire sphaerae superficiem.*

Resol. Sit abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, cui ducatur alia pm infinite propinqua, et recta MR radio AC parallela, erit Pp = MR $= dx$, mR $= dy$. Sit porro radius AC $= r$, eiusdem peripheria $= p$, erit ob triangula CPM, MRm similia PM : MC = MR : Mm, seu $y : r = dx$: Mm; vnde Mm $= \frac{rdx}{y}$. Si iam arculus Mm ducatur in peripheriam $\frac{py}{r}$ radio PM descriptam, erit $\frac{prydx}{ry} = pdx$ zona elementaris ab arcu Mm genita, cuius integrale xp erit superficies segmenti sphaerici indeterminati ANPM. Si ergo fiat $x = 2r$, erit $2rp$ superficies sphaerae. Vnde rursus adparet superficiem sphaerae esse factum ex peripheria circuli maximi in diametrum.

324. *Coroll.* Quoniam cylindri sphaerae circumscripti conuexa superficies est peripheria baseos, seu circuli maximi sphaerae p ducta in cylindri altitudinem, seu in sphaerae diametrum $2r$, patet cylindri huiusmodi conuexam superficiem aequari superficiei sphaerae inscriptae. Conf. Elem. n. 580.

325. *PROBL. Eandem superficiem inuenire abscissis a centro computatis.*

Resol. Sit abscissa CP $= x$, ordinata PM $= y$, radius CA $= a$, erit $y^2 = a^2 - x^2$, ac differentiando $2ydy = -2xdx$, adeoque $dy = -\frac{xdx}{y}$, et $dy^2 = \frac{x^2dx^2}{y^2} = \frac{x^2dx^2}{a^2 - x^2}$, quo valore in formula generali $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto erit elementum superficiei $= \frac{py}{r}\sqrt{\left(\frac{a^2dx^2 - x^2dx^2 + x^2dx^2}{a^2 - x^2}\right)} = \frac{py}{r}\sqrt{\left(\frac{a^2dx^2}{a^2 - x^2}\right)} = \frac{apydx}{r\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{apydx}{ry} = \frac{apdx}{r}$, cuius integrale $\frac{apx}{r}$ est superficies segmenti indeter-

minati HMNG. Si ergo fiat $x = 2a$, erit $\frac{2a^2 p}{r}$ superficies totius sphaerae, prorsus vt supra (320).

Scholion. Supposita sphaerae superficie eiusdem soliditas facile definitur duplici hac methodo. 1.) Cum soliditas sphaerae coalescat ex innumeris crustis sphaericis concentricis infinite tenuibus, quarum cuiuslibet superficies est $= \frac{2px^2}{r}$, et profunditas $= dx$, erit vna eiusmodi crusta elementaris $= \frac{2px^2 dx}{r}$, cuius integrale est $\frac{2px^3}{3r}$, ac pro x ponendo radium sphaerae a erit soliditas sphaerae $= \frac{2pa^3}{3r} = \frac{2a^2 p}{r} \cdot \frac{1}{3} a$, quod est factum ex quadruplo circuli maximi $4 \cdot \frac{a^2 p}{2r} = \frac{2a^2 p}{r}$ in tertiam partem radii $\frac{1}{3} a$, vt supra (288). 2) Quia soliditas sphaerae potest etiam concipi tanquam coalescens ex infinitis conis rectis elementaribus, quarum vertices in sphaerae centro coeant, et bases efficiant superficiem totius sphaerae, erit vnius id genus coni basis differentiale superficiei totius sphaerae, seu $= d\left(\frac{2px^2}{r}\right) = \frac{4pxdx}{r}$, ac soliditas $= \frac{4pxdx}{r} \cdot \frac{1}{3} a$ (287) $= \frac{4apxdx}{3r}$, cuius integrale est $\frac{4apx^2}{6r} = \frac{2apx^2}{3r}$, vbi si fiat $x = a$, erit $\frac{2a^3 p}{3r}$ soliditas totius sphaerae, vt ante.

326. PROBL. *Inuenire superficiem conoidis parabolici rotatione parabolae APM circa axem AB geniti.* Fig. 90.

Resol. Sit parameter parabolae generantis $= a$, abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit $ax = y^2$, et differentiando $adx = 2ydy$; vnde $dx = \frac{2ydy}{a}$, et $dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{a^2}$, quo valore in formula generali $\frac{py}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto erit elementum superficiei $= \frac{pydy}{ar} \sqrt{(4y^2 + a^2)}$, cuius integrale $\frac{p}{12ar} \sqrt{(4y^2 + a^2)} \cdot (4y^2$

$+a^2)$ eſt ſuperficies conoidis parabolici a plano APM geniti. Eſt adeo conoidis huiusmodi ſuperficies quarta proportionalis ad $6a$, $\sqrt{(4y^2+a^2)}$, $\frac{p}{2r}(4y^2+a^2)$, ſeu ad ſextuplam parametrum, ad radium, et ad aream circuli, cuius radius ſit $\sqrt{(4y^2+a^2)}$.

327. *Coroll.* Elicitur quoque eiusdem conoidis ſuperficies, ſi ex aequatione ſuperiore $adx = 2ydy$ quaeratur non dx^2, vti ſupra fecimus, ſed dy^2, ac eius valor in formula generali ſubſtituatur: erit enim $dy = \frac{adx}{2y}$, et $dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4y^2} = \frac{a^2dx^2}{4ax} = \frac{adx^2}{4x}$, quo valore in formula generali $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ſubſtituto erit elementum ſuperficiei $= \frac{py}{r}\sqrt{(dx^2+\frac{adx^2}{4x})} = \frac{py}{r}\sqrt{(\frac{4xdx^2+adx^2}{4x})} = \frac{pydx}{2r\sqrt{x}}$ $\sqrt{(4x+a)}$, ſeu pro y ponendo $\sqrt{ax}$ erit $= \frac{pa^{\frac{1}{2}}dx}{2r}\sqrt{(4x+a)}$, cuius integrale, ſeu ſuperficies conoidis quaeſita eſt $= \frac{pa^{\frac{1}{2}}}{12r}\sqrt{(4x+a)}.(4x+a)$, id quod ſemel hic adnotaſſe ſufficiat.

Fig. 91. 328. PROBL. *Inuenire ſuperficiem ſphaeroidis elliptici rotatione ellipſeos circa axem transuerſum AB geniti.*

Reſol. Sit ſemiaxis transuerſus ellipſeos generantis $AC = a$, ſemiaxis coniugatus $CD = b$, abſciſſa quaecunque $AP = x$, ordinata $PM = y$, erit ex natura ellipſeos $\frac{a^2y^2}{b^2} = 2ax - x^2$ (Elem. 628), hinc differentiando $\frac{2a^2ydy}{b^2} = 2adx - 2xdx$; vnde $dx = \frac{a^2ydy}{b^2(a-x)}$, et $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{b^4(a^2-2ax+x^2)}$, ac pro $-2ax+x^2$ ponendo e ſuperiori ellipſeos aequatione $-\frac{a^2y^2}{b^2}$ erit idem $dx^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{b^2(b^2-y^2)}$; quo valore in formula generali $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ſubſtituto erit

elementum ſuperficiei $= \frac{py}{r} \surd \left(\frac{a^2y^2dy^2 + b^4dy^2 - b^2y^2dy^2}{b^2(b^2 - y^2)}\right) = \frac{pydy \surd (b^4 + a^2y^2 - b^2y^2)}{rb \surd (b^2 - y^2)}$. Ponamus breuitatis cauſſa $a^2 - b^2 = c^2$, erit idem elementum $= \frac{pydy \surd (b^4 + c^2y^2)}{rb \surd (b^2 - y^2)}$. Vt iam elementum iſtud integretur, reducatur tam numerator, quam denominator in ſeriem infinitam, deinde ſeries prior per poſteriorem diuidatur, ac denique ſeries pro quoto enaſcens pro more integretur, inque reperto integrali pro x ſubſtituatur $2a$, ita habebitur ſeries exhibens quaeſitam ſphaeroidis ſuperficiem.

329. *PROBL. Inuenire ſuperficiem conoidis hyperbolici rotatione hyperbolae circa axem AQ geniti.* Fig. 92.

Reſol. Sit ſemiaxis transuerſus hyperbolae AC $= a$, ſemiaxis coniugatus CD $= b$, abſciſſa quaecunque CP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura hyperbolae $\frac{a^2y^2}{b^2} = x^2 - a^2$ (Elem. 631), vnde $y = \frac{b}{a} \surd (x^2 - a^2)$, et differentiando $dy = \frac{bdx}{a\surd(x^2 - a^2)}$, ac $dy^2 = \frac{b^2dx^2}{a^2(x^2 - a^2)}$: ſi ergo pro y, et pro dy^2 hi valores ſubſtituantur in formula generali $\frac{py}{r} \surd (dx^2 + dy^2)$, erit elementum ſuperficiei $= \frac{pb}{ar} \surd (x^2 - a^2) . \surd \left(dx^2 + \frac{b^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right) = \frac{pb}{ar} \surd (x^2 - a^2) . \surd \left(\frac{a^2x^2dx^2 - a^4dx^2 + b^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right) = \frac{pbdx}{a^2r} \surd (a^2x^2 - a^4 + b^2x^2)$. Fiat breuitatis cauſſa $a^2 + b^2 = c^2$, erit idem elementum $= \frac{pbdx}{a^2r} \surd \left(c^2x^2 - \frac{c^2a^4}{c^2}\right) = \frac{pbcdx}{a^2r} \surd \left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)$, quod reſolutum in ſeriem infinitam, ac pro more integratum dabit quaeſitam ſuperficiem.

330. *PROBL. Inuenire ſuperficiem ſolidi rotatione Tractoriae AMN circa aſymptotum BL geniti.* Fig. 81.

Resol. Sit abscissa BP $= x$, ordinata PM $= y$, arcus AM $= u$, ducta pm priori ordinatae infinite propinqua erit Pp = MO $= dx$, M$m = du$, mO $= -dy$, cum scilicet crescente x decrescat y; sit item tangens MT $= a$, erit in triangulis MOm, PMT similibus mO : Mm = MP : MT, seu $-dy : du = y : a$; vnde $du = -\frac{ady}{y}$, quo valore in formula generali $\frac{py}{r}\surd(dx^2+dy^2)$ pro $\surd(dx^2+dy^2)$ substituto erit elementum superficiei $= \frac{pydu}{r} = \frac{-apdy}{r}$, cuius integrale, seu superficies quaesita est $= -\frac{apy}{r} + C$. Si iam fiat $y = a$, seu PM abeat in BA, patet superficiem solidi, quod tunc euanescet, fore $= 0$, seu $-\frac{a^2p}{r} + C = 0$, et hinc $C = \frac{a^2p}{r}$: ergo plenum integrale, seu superficies solidi a plano ABPM geniti est $= \frac{a^2p - apy}{r}$. Quare si fiat $y = 0$, seu si solidum versus L et N infinite producatur, erit eius superficies $= \frac{a^2p}{r}$.

331. *Coroll.* Cum area circuli, cuius radius est $= \surd 2a^2$, sit $= \frac{a^2p}{r}$, patet superficiem solidi infinite producti aequari circulo, cuius radius sit $= \surd 2a^2$, seu diagonalis quadrati supra rectam AB $= a$ descripti.

CAPVT V.

De vsu Calculi Integralis in Methodo Tangentium inuersa.

332. Quemadmodum e data ad curuam quampiam aequatione determinatur eiusdem subtangens, tangens, subnormalis, normalis, euoluta, radius osculi, area, solidum eiusdem rotatione genitum etc. ita vicissim e dato quolibet horum facile defini-

finitur aequatio naturam curuae exprimens; et calculus, quo istud efficitur, *methodus tangentium inuersa* adpellatur.

333. *PROBL. Data expressione subtangentis, tangentis, normalis, subnormalis etc. inuestigare naturam curuae.*

Resol. 1) Si detur expressio subtangentis, tangentis etc. ea conferatur cum formula generali subtangentis, tangentis etc. nascetur ex hac collatione aequatio differentialis, quae integrata definiet naturam curuae. 2) Si detur expressio arcus, areae, vel solidi rotatione curuae geniti, facta differentiatione conferatur eiusdem differentiale cum formula generali elementi areae, arcus, vel solidi; nascetur ex hac collatione denuo aequatio differentialis, quae integrata exprimet naturam curuae. Iuuat rem exemplis illustrare.

334. *PROBL. Inuenire curuam, cuius subtangens sit* $\frac{2y^2}{a}$.

Resol. Conferatur expressio data cum formula generali subtangentis $\frac{ydx}{dy}$ (36), erit $\frac{2y^2}{a} = \frac{ydx}{dy}$, seu $2y^2dy = aydx$, et $2ydy = adx$; quare erit integrando $y^2 = ax$. Est adeo curua quaesita parabola, cuius parameter est a, abscissa x, ordinata y. (Elem. 624).

335. *PROBL. Inuenire curuam, cuius subtangens aequetur ordinatae* y.

Resol. Conferendo datam subtangentis aequationem cum formula generali erit $y = \frac{ydx}{dy}$, seu $ydy = ydx$, adeoque $dy = dx$, ac integrando $y = x$. Est adeo curua quaesita cyclois, in qua abscissa x est arcus circuli genitoris. Quodsi x sit linea recta, aequatio inuenta erit ad triangulum rectangulum aequicrurum, in quo perspicuum est abscissas aequari ordinatis.

336. PROBL. *Inuenire curuam, cuius subtangens sit tertia proportionalis ad $a - x$, et ad y.*

Resol. Cum sit ex problematis conditione $a - x : y = y : \frac{ydx}{dy}$, erit $aydx - xydx = y^2dy$, seu $adx - xdx = ydy$; quare integrando $ax - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2$, seu $2ax - x^2 = y^2$. Est adeo curua quaesita circulus, cuius diameter est $2a$, abscissa x, ordinata y (Elem. 420.).

337. PROBL. *Inuenire curuam, cuius subtangens sit dupla abscissae x.*

Resol. Conferendo datam expressionem cum formula generali subtangentis erit $2x = \frac{ydx}{dy}$, et hinc $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, quod cum sit differentiale logarithmicum (243), si logarithmicae subtangens sit $= a$, erit $\frac{dx}{2x} = \frac{ady}{y}$, seu $\frac{dx}{2ax} = \frac{dy}{y}$, ac integrando $\frac{1}{2}l(ax) = ly$, siue $l\sqrt{ax} = ly$, adeoque $\sqrt{ax} = y$, et $y^2 = ax$. Est adeo curua quaesita parabola, cuius parameter est a.

338. PROBL. *Inuenire curuam, in qua constans quaedam quantitas a sic se habeat ad ordinatam y, vt $\sqrt{(a^2 + y^2)}$ ad subtangentem.*

Resol. Cum sit ex problematis conditione $a : y = \sqrt{(a^2 + y^2)} : \frac{ydx}{dy}$, erit $\frac{y\sqrt{(a^2+y^2)}}{a} = \frac{ydx}{dy}$, seu $\frac{dy\sqrt{(a^2+y^2)}}{a} = dx$, adeoque integrando $\int\left(\frac{dy\sqrt{(a^2+y^2)}}{a}\right) = x$. Si ergo parametro $2a$ describatur parabola AM, sitque abscissa AP $= u$, ordinata PM $= y$, erit $y^2 = 2au$, ac proinde $u = \frac{y^2}{2a}$, et differentiando $du = \frac{ydy}{a}$, $du^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2}$. Iam dum abscissa AP est $= x$, arculus Mm est $=$

Fig. 83.

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: ergo in casu nostro, in quo AP est $= u$, erit Mm $= \sqrt{(du^2 + dy^2)}$, ac pro du^2 substituendo valorem superiorem erit M$m = \sqrt{(\frac{y^2dy^2 + a^2dy^2}{a^2})} = \frac{dy}{a}\sqrt{(a^2 + y^2)}$, cuius integrale $\int(\frac{dy\sqrt{(a^2+y^2)}}{a})$ est $=$ AM $= x$. Quare curua quaesita eiusmodi est, vt si ordinatas communes habeat cum parabola AM, abscissae eiusdem sint arcus parabolae correspondentes. Pendet adeo eiusdem descriptio a rectificatione arcus parabolici.

339. *PROBL. Inuenire curuam, in qua subnormalis aequetur rectae constanti a.*

Resol. Conferendo datam expressionem cum formula generali subnormalis $\frac{ydy}{dx}$ (73) erit $a = \frac{ydy}{dx}$, seu $adx = ydy$, et integrando $ax = \frac{1}{2}y^2$, seu $y^2 = 2ax$. Est adeo curua quaesita parabola, cuius parameter est $2a$.

340. *PROBL. Inuenire curuam, in qua subnormalis sit $a - x$.*

Resol. Conferendo datam expressionem cum formula generali subnormalis erit $a - x = \frac{ydy}{dx}$, seu $adx - xdx = ydy$, ac integrando $ax - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2$, seu $y^2 = 2ax - x^2$. Est adeo curua quaesita circulus, cuius diameter est $2a$.

341. *PROBL. Inuenire curuam, in qua subnormalis sit $\frac{ap - 2px}{2a}$.*

Resol. Conferendo datam expressionem cum formula generali subnormalis erit $\frac{ap - 2px}{2a} = \frac{ydy}{dx}$, seu $apdx - 2pxdx = 2aydy$, ac integrando $apx - px^2 = ay^2$, seu $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Est adeo

curua quaesita ellipsis, cuius parameter est p, axis transuersus a (Elem. 630).

342. PROBL. *Inuenire curuam, in qua subnormalis sit* $\sqrt{ax}$.

Resol. Conferendo datam aequationem cum formula generali subnormalis erit $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\frac{ydy}{dx}$, seu $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx=ydy$, ac integrando $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}y^2$, adeoque $y^2=\frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}x\sqrt{ax}=\frac{2}{3}x\sqrt{4ax}$. Iam curua, ad quam inuenta aequatio est, hoc pacto describitur. Fig. 94. Fiat parametro $4a$ parabola AB, in qua sit abscissa $AP=x$, ordinata $PM=u$, erit ex natura parabolae $u^2=4ax$, et $u=\sqrt{4ax}$. Si ergo inter $\frac{2}{3}x$, et ordinatam parabolae $\sqrt{4ax}$, seu inter $\frac{2}{3}AP$, et inter PM quaeratur media proportionalis PN, erit $PN^2=\frac{2}{3}x\sqrt{4ax}=y^2$: si idem fiat respectu quamplurimarum ordinatarum, erit AND curua quaesita.

343. PROBL. *Inuenire curuam, in qua normalis aequetur rectae constanti a.*

Resol. Conferendo datam expressionem cum formula generali normalis $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (81), erit $a=\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, et hinc $adx=y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ac omnia eleuando ad quadratum erit $a^2dx^2=y^2dx^2+y^2dy^2$, et $y^2dy^2=a^2dx^2-y^2dx^2$; quare $dx^2=\frac{y^2dy^2}{a^2-y^2}$ et $dx=\frac{ydy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, vel $-dx=-\frac{ydy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, id est $-dx=-ydy(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, et integrando $-x=\sqrt{(a^2-y^2)}+C$. Vt iam adpareat, an hoc integrale completum sit, fiat $y=0$, erit $\sqrt{a^2}+C=0$, seu $C=-a$: ergo $\sqrt{(a^2-y^2)}-a=-x$, adeoque $\sqrt{(a^2-y^2)}=a-x$, et eleuando ad quadratum $a^2-y^2=a^2-2ax+x^2$; vnde $y^2=2ax-x^2$. Est adeo curua quaesita circulus, cuius diameter est $2a$.

344. PROBL. *Inuenire curuam, cuius arcus sit* $= \int \frac{dy}{p} \sqrt{(4y^2 + p^2)}$.

Resol. Conferendo differentiale datae expressionis cum formula generali elementi arcus $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (272) erit $\frac{dy}{p} \sqrt{(4y^2 + p^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et eleuando ad quadratum, ac per p^2 omnes terminos multiplicando erit $4y^2dy^2 + p^2dy^2 = p^2dx^2 + p^2dy^2$, seu $4y^2dy^2 = p^2dx^2$, ac radicem quadratam extrahendo $2ydy = pdx$, et integrando $y^2 = px$. Est adeo curua quaesita parabola, cuius parameter est p.

345. PROBL. *Inuenire curuam, cuius quadratura, seu area sit* $\frac{2}{3} xy$.

Resol. Differentietur area data $\frac{2}{3} xy$, ac eius differentiale conferatur cum formula generali elementi areae ydx (249), erit $\frac{2}{3} xdy + \frac{2}{3} ydx = ydx$, seu $\frac{2}{3} xdy = \frac{1}{3} ydx$, id est $2xdy = ydx$, adeoque $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$: quare posita subtangente logarithmicae $= a$, erit $\frac{ady}{y} = \frac{dx}{2x}$, ac $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2ax}$: ergo integrando $ly = \frac{1}{2} l(ax) = l\sqrt{ax}$; quare $y = \sqrt{ax}$, et $y^2 = ax$. Est adeo curua quaesita parabola, cuius parameter est a.

346. PROBL. *Inuenire curuam, cuius area sit* $\frac{x^3}{a}$.

Resol. Areae datae differentiale $\frac{3x^2dx}{a}$ conferatur cum formula generali elementi areae ydx, erit $\frac{3x^2dx}{a} = ydx$, siue $\frac{3x^2}{a} = y$, ac $x^2 = \frac{1}{3} ay$. Est ergo curua quaesita parabola, cuius conuexitas refertur ad rectam AD, et cuius parameter sit $= \frac{1}{3} a$. *Fig. 99.*
Sit enim eius parabolae abscissa AQ $= x$, ordinata QM $= y$, parameter $= \frac{1}{3} a$; erit ex natura parabolae AP . $\frac{1}{3} a = \text{PM}^2$, seu QM . $\frac{1}{3} a = \text{AQ}^2$, id est $\frac{1}{3} ay = x^2$.

347. *PROBL. Inuenire curuam, cuius area sit* $\frac{bx^2}{2a}$.

Resol. Conferendo areae datae elementum cum formula generali erit $\frac{bxdx}{a} = ydx$, seu $\frac{bx}{a} = y$. Quare data area pertinet ad triangulum rectilineum, in quo $a : b = x : y$, seu $y = \frac{bx}{a}$.

348. *PROBL. Inuenire curuam, cuius area sit* $\int dx \sqrt{(ax + x^2)} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}$.

Resol. Conferendo areae datae elementum cum formula generali erit $dx \sqrt{(ax + x^2)} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} = ydx$, seu $dx\sqrt{p} . \sqrt{(ax + x^2)} = ydx\sqrt{a}$, et eleuando ad quadratum $paxdx^2 + px^2dx^2 = ay^2dx^2$, et hinc $pax + px^2 = ay^2$, et $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$. Est adeo curua quaesita hyperbola communis ad axem relata (Elem. 630).

349. *PROBL. Inuenire curuam, cuius area sit* $a\sqrt{(a^2 + x^2)}$.

Resol. Conferendo elementum areae datae cum formula generali erit $axdx(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = ydx$; vnde $\frac{ax}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = y$. Iam curua quaesita hoc pacto construitur. Ducatur hyperbola aequi-
Fig. 95. latera AB, cuius scilicet ambo axes sint $= 2a$, adeoque semiaxis CA $= a$; sitque abscissa quaecunque CD $=$ PM $= x$, ordinata DM $=$ CP $= u$, erit ex natura huius hyperbolae $x^2 = u^2 - a^2$, seu $a^2 + x^2 = u^2$, et hinc $u = \sqrt{(a^2 + x^2)}$. Si ergo ad rectas CP, CA, PM, seu ad $\sqrt{(a^2 + x^2)}$, a, et x quaeratur quarta proportionalis $\frac{ax}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = y =$ PN, idemque fiat respectu quamplurium ordinatarum, erit ANQ curua quaesita.

350. *PROBL. Inuenire curuam genitricem solidi* $\int (pxdx - \frac{px^2dx}{2r})$.

Resol. Conferendo dati solidi elementum cum formula generali elementi solidorum $\frac{py^2dx}{2r}$ (285) erit $pxdx - \frac{px^2dx}{2r} = \frac{py^2dx}{2r}$, seu $2rpxdx - px^2dx = py^2dx$; vnde $2rx - x^2 = y^2$. Est adeo curua genitrix circulus, et solidum propositum sphaera habens diametrum $2r$.

351. *PROBL. Inuenire curuam genitricem solidi* $\frac{apx^2}{4r}$.

Resol. Conferendo elementum dati solidi cum formula generali erit $\frac{apxdx}{2r} = \frac{py^2dx}{2r}$, seu $ax = y^2$. Est adeo curua genitrix parabola, cuius parameter est a.

SECTIO TERTIA.

De multiplici Calculi Integralis vsu in Mechanica, et Physica.

CAPVT I.

De vsu Calculi Integralis in Centro Grauitatis inuestigando.

352. Ex iis, quae tradi solent in mechanica, et nos in physica docuimus, perspicuum est 1) Momentum massae cuiusuis, seu nisum, quem exercet, esse factum e massa in celeritatem initialem; seu si massa cum aliis connexa sit, esse factum e massa in distantiam a puncto quopiam, linea, vel plano computatam. 2) Massas vtcunque dispersas eandem prorsus habere momentorum summam, quam haberent, si omnes in communi centro grauitatis collectae essent. 3) Et hinc summam momentorum omnium esse factum e summa massarum in distantiam centri gra-

uitatis communis ab eodem puncto, linea, vel plano, a quo momenta singularum massarum computantur. 4) Adeoque si summa momentorum omnium diuidatur per summam massarum, obtineri distantiam centri grauitatis communis a puncto illo, linea, vel plano.

353. In hac centri grauitatis indagatione supponemus elementa infinitesima linearum, planorum, ac solidorum esse veluti totidem ponduscula aequalia, seu elementis ipsis proportionalia: ac proinde dum centrum grauitatis inuestigabimus, illud punctum lineae, plani, vel solidi quaeremus, circa quod elementa omnia instar ponduscolorum spectata sint in perfecto aequilibrio.

354. *Coroll.* Quare in centri grauitatis inquisitione 1) Statuendum erit aliquod punctum, linea, vel planum, quo elementorum momenta referantur, siue a quo distantiae eorundem computentur. 2) Supputanda erit summa elementorum, ac summa momentorum omnium. 3) Denique summa momentorum omnium diuidenda erit per summam elementorum, vt obtineatur distantia centri grauitatis communis a puncto illo, linea, vel plano.

Fig. 96. 355. PROBL. *Inuenire centrum grauitatis lineae rectae AB.*

Resol. Computetur distantia centri quaesiti a puncto extremo A. Sit data recta AB $= a$, pars eiusdem quaelibet AP $= x$, ductis perpendiculis PM et pm infinite sibi propinquis erit $Pp = dx$ elementum partis AP, adeoque summa elementorum partem AP constituentium erit $\int dx = x$. Ducatur elementum dx in suam a puncto A, seu a recta CD distantiam x, erit xdx momentum vnius elementi, seu elementum summae momentorum, quae habentur in parte AP: ergo summa omnium momentorum partis AP erit $= \int xdx = \frac{1}{2} x^2$; quae si per summam omnium elementorum, seu per x diuidatur, quotus $\frac{1}{2} x$ erit distantia centri gra-

grauitatis partis AP a puncto A, seu a recta CD. Si ergo fiat AP = AB, siue $x = a$, erit $\frac{1}{2}a$ distantia centri grauitatis totius rectae AB ab eadem recta CD; id est, centrum grauitatis lineae rectae est medium eiusdem punctum, quod quidem e notione centri grauitatis in linea homogenea etiam immediate deducitur.

Scholion. Diximus elementum dx = Pp ductum in suam a recta CD distantiam x, hoc est xdx exhibere elementum summae momentorum partis AP: si enim quodlibet elementum dx ducatur in suam a recta CD distantiam, quodlibet factum formabit trapezium infinitesimum, quale est PMmp; adeoque summa omnium factorum, seu omnium momentorum formabit triangulum aequicrurum APM, cuius elementum PMmp vtique est = xdx.

356. *PROBL. Inuenire centrum grauitatis parallelogrammi ABFD.*

Resol. Latera opposita dati parallelogrammi secentur bifariam per rectas GH, et PK, erit punctum intersectionis harum rectarum O centrum grauitatis quaesitum. Nam recta quaecunque per punctum O ducta diuidit parallelogrammum in duas aequales partes, seu in aequalem elementorum similiter positorum numerum: et hinc binorum quorumuis elementorum vtrinque a recta illa aeque distantium centrum commune grauitatis erit in recta illa, adeoque omnium elementorum, seu totius parallelogrammi centrum grauitatis in eadem recta erit, poteruntque concipi omnia elementa tanquam totidem pondufcula in eandem illam rectam translata esse: ergo centrum grauitatis omnium erit in medio eius rectae, seu in puncto O.

357. *PROBL. Inuenire centrum grauitatis trianguli cuiusuis ABE.* *Fig. 97.*

Resol. Ducatur per verticem A recta CD basi BE parallela, seceturque basis bifariam per rectam AG; diuidet haec totum triangulum, adeoque omnia elementa eiusdem infinitesima MmqQ bifariam: erit adeo centrum quaesitum in hac linea. Demittatur porro recta AD ad basim perpendicularis, sitque AD $= a$, BE $= b$, AG $= c$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata MQ $= y$, AN $= u$; ducta alia ordinata mq priori MQ infinite propinqua erit Nn $= du$, ac elementum MmqQ $=$ MQ. Nn $= ydu$.

Iam ob triangula APN, AGD similia erit AN : AP $=$ AD : AG, seu $u : x = a : c$; vnde $u = \frac{ax}{c}$, et $du = \frac{adx}{c}$, adeoque elementum $ydu = \frac{aydx}{c}$. Item in triangulis AMQ, ABE similibus erit MQ : AP $=$ BE : AG, seu $y : x = b : c$; vnde $y = \frac{bx}{c}$, adeoque elementum $\frac{aydx}{c} = \frac{abxdx}{c^2} =$ MmqQ. Ducatur iam hoc elementum in suam a recta CD distantiam AN $= u = \frac{ax}{c}$ erit $\frac{a^2bx^2dx}{c^3}$ differentiale, seu elementum summae momentorum trianguli AMQ, ac eiusdem integrale $\frac{a^2bx^3}{3c^3}$, erit summa momentorum, quae si diuidatur per summam elementorum $\int(\frac{abxdx}{c^2}) = \frac{abx^2}{2c^2}$, quotus $\frac{2a^2bc^2x^3}{3abc^3x^2} = \frac{2}{3}.\frac{ax}{c} = \frac{2}{3}u$ erit distantia centri grauitatis trianguli indeterminati AMQ a recta CD. Si ergo fiat AP $=$ AG, seu $x = c$, erit $\frac{2}{3}a$ distantia centri grauitatis totius trianguli ABE ab eadem recta CD. Quare si fiat An $= \frac{2}{3}$AD, et per punctum n ducatur recta np basi BE parallela, erit punctum p centrum quaesitum distans a recta CD per An $= \frac{2}{3}a$.

358. *Coroll. 1.* Cum sit An : AD $=$ AP : AG, et An sit $= \frac{2}{3}$AD, erit etiam AP $= \frac{2}{3}$AG. Quare si in recta AG

basim BE bifariam fecante capiantur $\frac{2}{3}$ partes, obtinebitur centrum grauitatis quaesitum.

359. *Coroll. 2.* Si triangulum aequicrurum fuerit, perpendiculum AD congruet cum AG, in quo proinde si capiantur $\frac{2}{3}$ partes, obtinebitur centrum grauitatis quaesitum.

360. PROBL. *Inuenire centrum grauitatis in spatio parabolico ANE.* Fig. 98.

Resol. Per verticem parabolae A ducatur recta CD basi NE parallela, sitque $AB = a$, parameter $= p$, abscissa quaecunque $AP = x$, ordinata $MQ = y$, erit $PM = \frac{1}{2}y$, ductaque mq priori MQ infinite propinqua erit $Pp = dx$, elementum spatii $MQqm = ydx$. Est vero ex natura parabolae $\frac{1}{4}y^2 = px$, seu $y^2 = 4px$; vnde $y = 2\sqrt{px}$, ac elementum $ydx = 2dx\sqrt{px}$. Ducatur hoc elementum in suam a recta CD distantiam $AP = x$, erit $2xdx\sqrt{px} = 2xdxp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx$ elementum summae omnium momentorum areae AMQ, et eiusdem integrale $\frac{4}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$ erit summa omnium momentorum eiusdem areae. Diuidatur iam haec summa per summam elementorum eiusdem areae $\int 2dx\sqrt{px} = \int 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, quotus $\frac{12}{20}x = \frac{3}{5}x$ erit distantia centri grauitatis areae indefinitae AMQ a recta CD. Si ergo fiat $AP = AB$, seu $x = a$, erit $\frac{3}{5}a$ distantia centri grauitatis totius spatii ANE a recta CD: quare cum centrum illud iaceat in recta AB omnia spatii elementa bisecante, si capiantur in recta AB $\frac{3}{5}$ partes, obtinebitur centrum quaesitum.

361. PROBL. *Inuenire centrum grauitatis in dimidia area parabolica ABE.*

Resol. Vt centri quaesiti positio determinetur, inuestigandae sunt eiusdem distantiae a rectis CD et AB: harum enim distan-

tiarum communis interfectio fitum eiusdem determinabit. Sit ergo BE $= c$, ordinata quaecunque PQ $= y$, cetera vt fupra; erit $ydx =$ PQqp, et diftantia centri grauitatis a recta CD inuenietur vt ante $\frac{3}{5}a$. Quia vero hoc centrum non iacet, vt prius, in recta AB, debet inueniri eius ab AB diftantia hoc pacto.

Quoduis elementum ydx fpectari poteft vt parallelogrammum infinitefimum, cuius centrum grauitatis diftat ab axe AB dimidio latere, feu per $\frac{1}{2}y$: fi ergo ydx ducatur in $\frac{1}{2}y$; erit $\frac{y^2dx}{2}$ momentum vnius id genus elementi, feu erit elementum fummae momentorum omnium areae indeterminatae APQ; eft autem $y^2 = px$, et hinc elementum $\frac{y^2dx}{2} = \frac{pxdx}{2}$, cuius integrale $\frac{1}{4}px^2 = \frac{1}{4}xy^2$, ponendo fcilicet $\frac{y^2}{x}$ pro p, eft fumma momentorum eiusdem areae, quae fi diuidatur per fummam elementorum eiusdem $\int ydx$, feu pro y ponendo $\surd px = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, per $\int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy$, quotus $\frac{3}{8}y$ erit diftantia centri grauitatis areae indeterminatae APQ ab axe AB. Si ergo fiat PQ = BE, feu $y = c$, erit $\frac{3}{8}c$ diftantia centri grauitatis totius areae ABE ab eodem axe. Quare fi fiat AG $= \frac{3}{5}a = \frac{3}{5}$AB, et BK $= \frac{3}{8}c = \frac{3}{8}$BE, ductae rectae GH et KO parallelae rectis CD et AB, mutua in puncto O interfectione determinabunt quaefitum grauitatis centrum.

Fig. 99. 362. *PROBL. Inuenire centrum grauitatis in area parabolica externa ADE.*

Refol. Adparet rurfus quaerendas effe centri grauitatis diftantias a rectis AB et AD, communique harum diftantiarum interfectione centrum quaefitum determinari. Sit ergo AB = DE $= a$, BE = AD $= b$, parameter parabolae $= p$, abfciffa quae-

cunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, cui ducta alia pm infinite propinqua, rectisque MQ et mq inter se parallelis, ac ad AD perpendicularibus, erit $Qq = Rm = dy$, et $xdy =$ QMmq erit elementum areae indeterminatae AQM, quod si ducatur in suam ab axe AB distantiam PM $= y$, erit $xydy$ elementum summae momentorum eiusdem areae: est autem $x = \frac{y^2}{p}$, adeoque idem elementum $xydy = \frac{y^3dy}{p}$, cuius integrale $\frac{y^4}{4p}$ est summa momentorum, quae si diuidatur per summam elementorum eiusdem areae $\int xdy$, seu pro x ponendo $\frac{y^2}{p}$ per $\frac{\int y^2dy}{p} = \frac{y^3}{3p}$, quotus $\frac{3}{4}y$ erit distantia centri grauitatis areae AMQ ab axe AB. Si ergo fiat PM $=$ BE, seu $y = b$, erit $\frac{3}{4}b$ distantia centri grauitatis areae integrae ADE ab eodem axe AB.

Vt iam distantia eiusdem a recta AD determinetur, ducatur elementum supra inuentum $xdy =$ QMmq in distantiam sui centri a recta AD, seu in $\frac{1}{2}x$, eritque $\frac{x^2dy}{2}$ elementum summae momentorum areae AQM relate ad rectam AD, ac pro x^2 ponendo $\frac{y^4}{p^2}$ erit idem elementum $= \frac{y^4dy}{2p^2}$, cuius integrale $\frac{y^5}{10p^2}$ erit summa omnium momentorum areae AQM, quae si diuidatur per summam elementorum eiusdem iam supra inuentam $\frac{y^3}{3p}$ quotus $\frac{3y^2}{10p}$ $= \frac{3px}{10p} = \frac{3}{10}x$ erit distantia centri grauitatis areae AQM a recta AD. Si ergo fiat AP $=$ AB, seu $x = a$, erit $\frac{3}{10}a$ distantia centri grauitatis totius areae ADE ab eadem recta AD.

Quare si fiat $Aq = \frac{3}{4}$ AD $= \frac{3}{4}b$, et AH $= \frac{3}{10}$AB $= \frac{3}{10}a$, rectis AB et AD ducendo parallelas qm et HO, hae sua in puncto O interfectione determinabunt centrum quaesitum.

Fig. 100. 363. *PROBL.* *Inuenire centrum grauitatis arcus cuiusuis circularis ABD.*

Resol. Si arcus quispiam LNT, ac proinde etiam eiusdem chorda LT per radium CN bifariam secetur, centrum grauitatis arcus iacebit in hoc radio. Si enim ducantur chordae infinitae *ff*, *gg* etc. ad LT parallelae, eas omnes radius CN bifariam diuidet, ac partes dati arcus LN et TN resoluentur in totidem arcus infinitesimos, quorum quiuis bini correspondentes, vt sunt *fg* et *fg*, aequaliter distabunt a radio CN: si ergo chordae spectentur vt vectes, et arculi correspondentes vt pondusculа aequalia iisdem adpensa, perspicuum est centrum commune grauitatis binorum quorumuis arculorum correspondentium, ac proinde etiam centrum grauitatis summae eorundem, seu totius arcus LNT fore in radio CN.

Ducatur iam diameter EF, chordae arcus dati ABD parallela, item ordinatae MP et *mp* infinite sibi propinquae, ac radius CB, sitque diameter EF $= 2r$, chorda AD $= 2a$, arcus datus ABD $= 2c$, abscissa CP $= x$, ordinata PM $= y$, arcus indeterminatus BM $= u$, erit M*m* $= du$, MR $= dx$. Porro ob triangula CPM, MR*m* similia erit PM : CM = MR : M*m*, seu $y : r = dx : du$; vnde $ydu = rdx$; atqui ydu est momentum arculi M*m* relate ad diametrum EF: ergo idem ydu seu rdx est elementum summae momentorum, et $\int rdx = rx$ est summa momentorum arcus BM, quae si diuidatur per summam elementorum eiusdem arcus, seu per $\int du = u$, quotus $\frac{rx}{u}$ erit distantia centri grauitatis arcus BM a diametro EF. Si ergo fiat CP = KA, seu $x = a$, erit BM = BA, seu $u = c$, et $\frac{ra}{c}$ erit distantia centri grauitatis arcus BA ab eadem diametro EF.

Cum ergo eadem sit distantia etiam centri grauitatis arcus BD, eadem quoque erit distantia centri grauitatis totius arcus ABD. Ponamus enim centra grauitatis arcuum BA et BD esse in O et Q, erit recta OQ haec centra iungens diametro EF parallela ob aequalem punctorum O et Q ab EF distantiam. Spectemus iam hanc rectam OQ vt vectem, in cuius extremis O et Q suspensa sint pondera aequalia arcus aequales BA et BD referentia, erit horum ponderum, seu arcuum centrum commune grauitatis in recta OQ; atqui idem centrum ex ante dictis est etiam in radio CB: est ergo in puncto S, quod ob OQ et EF parallelas eandem habet a diametro EF distantiam, quam centra O et Q, nimirum $\frac{ra}{c}$. Quare si ad arcus dati dimidium c, ad dimidium eius chordae a, ac ad radium r quaeratur quarta proportionalis CS erit in S centrum grauitatis quaesitum.

364. *Coroll.* Si quaeratur centrum grauitatis totius peripheriae circuli, erit $a = 0$, adeoque $\frac{ra}{c} = \frac{0}{c}$; hoc est, centrum grauitatis quaesitum S a diametro EF nihil distabit, ac proinde congruet cum centro circuli C.

365. *PROBL. Inuenire centrum grauitatis areae cuiusuis ellipticae AMQ.* *Fig. 101*

Resol. Sit semiaxis transuersus AB $= a$, semiaxis coniugatus FB $= b$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit ex natura ellipseos $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, et hinc $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$: quare si ducatur ordinata pm priori infinite propinqua, erit elementum areae PM$mp = ydx = \frac{bdx}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$ $= \frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{a}\sqrt{(2a - x)}$, adeoque MQ$qm = \frac{2bx^{\frac{1}{2}}dx}{a}\sqrt{(2a - x)}$. Si

iam hoc elementum ducatur in suam a recta CD distantiam x, erit $\frac{2bx^{\frac{3}{2}}dx}{a}\sqrt{(2a-x)}$ elementum summae momentorum areae indeterminatae AMQ: si ergo hoc elementum resoluatur in seriem infinitam, vti et elementum areae $\frac{2bx^{\frac{1}{2}}dx}{a}\sqrt{(2a-x)}$, ac series ambae integrentur, tum integrale prioris diuidatur per integrale posterioris, obtinebitur distantia centri grauitatis areae AMQ a recta CD, in cuius expressione si fiat $x=a$, habebitur distantia centri grauitatis semiellipseos AFE ab eadem recta CD. Iacere autem id centrum in axe AB perspicuum est.

366. *Coroll.* Cum aequationes ellipseos, et hyperbolae solo signo discrepent, eodem plane modo inuestigatur centrum grauitatis areae hyperbolicae ad axem relatae.

Fig. 102. 367. *PROBL. Inuenire centrum grauitatis in cylindro.*

Resol. Concipiatur secari cylinder planis ABCD, EFGH bases cylindri, ac proinde cylindrum ipsum bifariam secantibus, diuident haec plana bifariam omnia cylindri elementa basibus parallela, quale est LM*ml*, et hinc transibunt ambo per omnium elementorum, adeoque etiam per ipsius cylindri centrum grauitatis: quare centrum hoc erit in communi horum planorum intersectione, siue in axe cylindri IK.

Sit iam axis IK $=a$, abscissa quaecunque KP $=x$, radius baseos KC $=$ PM $=r$, peripheria $=p$, erit ductis LM et *lm* infinite sibi propinquis P$p=dx$, area circuli radio PM descripta $=\frac{1}{2}rp$, quae si in dx, seu in Pp ducatur, erit $\frac{1}{2}rpdx=$ LM*ml* elementum cylindri indeterminati DLMC. Quodsi hoc elementum ducatur in suam a basi distantiam, seu in x, erit $\frac{1}{2}rpxdx$ elementum summae momentorum, et eius integrale $\frac{rpx^2}{4}$ erit summa

ma momentorum eiusdem cylindri DLMC, quae si diuidatur per summam elementorum $\int \frac{1}{2} rpdx = \frac{1}{2} rpx$, quotus $\frac{1}{2} x$ erit distantia centri grauitatis cylindri DLMC a basi DGCH. Si ergo fiat KP = KI, seu $x = a$, erit $\frac{1}{2} a$ distantia centri grauitatis totius cylindri ABCD ab eadem basi. Est adeo id centrum in medio axe.

368. *PROBL. Inuenire centrum grauitatis in cono.*

Resol. Si e vertice coni A ad centrum baseos concipiatur *Fig.* 88.
duci axis AD, transibit is per centra omnium elementorum basi parallelorum, ac proinde etiam per centrum grauitatis ipsius coni. Sit iam axis AD $= a$, BD $= r$, peripheria baseos $= p$, abscissa quaecunque AI $= x$, ordinata IE $= y$, cui ducta alia infinite propinqua erit Ii $= dx$, peripheria circuli radio IE descripti $= \frac{py}{r}$, area eiusdem $= \frac{py^2}{2r}$, qua ducta in dx erit $\frac{py^2dx}{2r}$ elementum coni indeterminati AEF.

Est autem in triangulis ADB, AIE similibus AD : DB = AI : IE, seu $a : r = x : y$; vnde $y = \frac{rx}{a}$, $y^2 = \frac{r^2x^2}{a^2}$, adeoque elementum $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{prx^2dx}{2a^2}$, quod si iam hoc elementum ducatur in suam a vertice distantiam x, erit $\frac{prx^3dx}{2a^2}$ elementum summae momentorum, ac eius integrale $\frac{prx^4}{8a^2}$ erit summa momentorum coni indeterminati AEF, quae si diuidatur per summam elementorum eiusdem coni $\frac{\int prx^2dx}{2a^2} = \frac{prx^3}{6a^2}$, quotus $\frac{3}{4} x$ erit distantia centri grauitatis coni dicti a vertice. Si ergo fiat AI = AD, seu $x = a$, erit $\frac{3}{4} a$ distantia centri grauitatis totius coni ABC a vertice. Quare si fiat AO $= \frac{3}{4}$ AD $= \frac{3}{4} a$, erit in O centrum quaesitum.

369. *Coroll.* Eodem plane modo euincitur centrum grauitatis in pyramide obtineri, si a vertice inchoando tres quartae partes axis resecentur.

Fig. 89. 370. *PROBL. Inuenire centrum grauitatis in sphaera.*

Resol. Si sphaera cogitetur resolui in elementa circulo ED parallela, diameter AB transibit per omnium horum elementorum, adeoque etiam per ipsius sphaerae centrum grauitatis. Ducatur iam planum GH circulo ED parallelum, ac tangens sphaeram in A, sitque DC $= r$, peripheria eodem tanquam radio descripta $= p$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit $\frac{py}{r}$ peripheria, et $\frac{py^2}{2r}$ area circuli radio PM descripti. Est autem ex natura circuli $y^2 = 2rx - x^2$, adeoque $\frac{py^2}{2r} = px - \frac{px^2}{2r}$, quo per dx multiplicato erit $pxdx - \frac{px^2dx}{2r}$ elementum segmenti AQPM, quod elementum si multiplicetur per suam a plano GH distantiam x, erit $px^2dx - \frac{px^3dx}{2r}$ elementum summae momentorum, ac proinde integrale eiusdem $\frac{px^3}{3} - \frac{px^4}{8r}$ erit summa elementorum segmenti AQPM, quae si diuidatur per summam elementorum eiusdem $\int(pxdx - \frac{px^2dx}{2r}) = \frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{6r}$, quotus $\frac{8rx - 3x^2}{12r - 4x}$ erit distantia centri grauitatis segmenti AQPM a plano GH. Si ergo fiat AP $=$ AB, seu $x = 2r$, erit $\frac{8rx - 3x^2}{12r - 4x} = \frac{16r^2 - 12r^2}{12r - 8r} = \frac{4r^2}{4r}$ $= r$ distantia centri grauitatis totius sphaerae a plano GH: hoc est, centrum grauitatis sphaerae idem est cum centro magnitudinis eiusdem.

371. *Coroll. 1.* Si fiat $x = r$, erit $\frac{8rx - 3x^2}{12r - 4x} = \frac{8r^2 - 3r^2}{12r - 4r} =$ $\frac{5}{8}r$ distantia centri grauitatis hemisphaerii ab eodem plano GH.

372. *Coroll. 2.* Cum segmenti cuiusuis indeterminati AQPM centrum grauitatis distet a plano GH per $\frac{8rx - 3x^2}{12r - 4x}$, vocetur ea distantia c, erit $c = \frac{8rx - 3x^2}{12r - 4x}$; vnde nascetur haec pro-

portio $12r - 4x : 8r - 3x = x : c$, seu $3r - x : 2r - \frac{3}{4}x = x : c$.

373. PROBL. *Inuenire centrum grauitatis in conoide parabolico, quod gignitur, dum area parabolica ANB circa axem AB rotatur.* Fig. 98.

Resol. Illud perspicuum est centrum quaesitum iacere in axe rotationis AB, circa quem ordinatae describunt circulos basi conoidis parallelos. Ducatur iam per verticem A planum CD basi conoidis parallelum, sitque parameter parabolae genitricis $= b$, axis AB $= a$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, radius baseos BN $= r$, peripheria eiusdem $= p$ erit peripheria circuli radio PM descripti $= \frac{py}{r}$, et circulus ipse $= \frac{py^2}{2r}$; atqui y^2 est $= bx$: ergo $\frac{py^2}{2r} = \frac{pbx}{2r}$: si iam hic circulus ducatur in dx, erit $\frac{pbxdx}{2r}$ elementum conoidis indeterminati AQPM, quod elementum si ducatur in suam a plano CD distantiam x, erit $\frac{pbx^2dx}{2r}$ elementum summae momentorum, adeoque integrale eiusdem $\frac{pbx^3}{6r}$ erit summa momentorum conoidis AQPM, quae si diuidatur per summam elementorum eiusdem $\int\left(\frac{pbxdx}{2r}\right) = \frac{pbx^2}{4r}$, quotus $\frac{4pbx^3}{6pbx^2} = \frac{2}{3}x$ erit distantia centri grauitatis eiusdem conoidis a plano CD. Si ergo fiat AP $=$ AB, seu $x = a$, erit $\frac{2}{3}a$ distantia centri grauitatis totius conoidis ANBE ab eodem plano CD. Hinc si capiantur $\frac{2}{3}$ partes axis AB a vertice A inchoando, obtinebitur centrum grauitatis quaesitum.

374. PROBL. *Inuenire centrum grauitatis in solido, quod gignitur, dum area parabolica ABE circa rectam DE axi AB parallelam rotatur.* Fig. 99.

Resol. Sit parameter parabolae genitricis $= b$, BE $= r$, peripheria radio BE descripta $= p$, abscissa quaecunque AP $= x$,

ordinata PM $= y$, cui ducta alia pm infinite propinqua erit $Pp = dx$, $MT = r - y$, peripheria radio MT descripta $= \frac{rp - py}{r}$, circulus eodem radio descriptus $= \frac{r^2p - 2rpy + py^2}{2r}$, et circulus radio PT descriptus $= \frac{rp}{2} = \frac{r^2p}{2r}$: iam si prior circulus tollatur a posteriore residuum $\frac{2rpy - py^2}{2r}$ erit annulus, quem PM circa DE describit, qui annulus si ducatur in dx, erit $\frac{2rpydx - py^2dx}{2r}$ elementum solidi a plano AMP circa DE geniti: est autem $y = \sqrt{bx} = b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$: ergo hoc valore substituto erit idem elementum $= \frac{2rpb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - pbxdx}{2r}$.

Si iam elementum inuentum ducatur in suam a plano AD distantiam x, erit $\frac{2rpb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - pbx^2dx}{2r} = \frac{2rpb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1}dx - pbx^2dx}{2r}$ elementum summae momentorum, atque adeo eius integrale $\frac{2rpb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+2}}{5r} - \frac{pbx^3}{6r}$ erit summa momentorum solidi a plano AMP geniti: quare si haec summa diuidatur per summam elementorum eiusdem solidi $\int\left(\frac{2rpb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - pbxdx}{2r}\right) = \frac{2rb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1}}{3r} - \frac{pbx^2}{4r}$, quotus $\frac{244r^4pb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+2} - 60r^3pbx^3}{240r^4pb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1} - 90r^3pbx^2} = \frac{24rb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+2} - 10bx^3}{40rb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1} - 15bx^2}$ erit distantia centri grauitatis eiusdem solidi a plano AD; ac si pro $b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ substituatur y, et pro x substituatur $\frac{y^2}{b}$, erit eadem distantia $= \frac{24rx^2y - 10x^2y^2}{40rxy - 15xy^2} = \frac{24rx - 10xy}{40r - 15y}$. Si ergo fiat $x = a$, erit $y = r$, et hinc $\frac{24rx - 10xy}{40r - 15y}$ erit $= \frac{24ar - 10ar}{40r - 15r} = \frac{14ar}{25r} = \frac{14}{25}a$, quae est distantia centri grauita-

tis solidi rotatione plani ABE geniti ab eodem plano AD, quam quidem distantiam sumendam esse in axe rotationis DE perspicuum est.

375. PROBL. *Inuenire centrum grauitatis in solido, quod generatur, si idem planum parabolicum ABE circa tangentem AD rotetur.*

Resol. Centrum grauitatis in axe rotationis AD iacere manifestum est. Sit iam AB $= r$, peripheria eodem tanquam radio descripta $= p$, parameter parabolae genitricis $= b$, BE $= a$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, cui ducta alia infinite propinqua erit $Pp = dx$, peripheria radio AP descripta $= \frac{px}{r}$, quae si ducatur in PM, seu in y, erit $\frac{pxy}{r}$ superficies cylindrica ab ordinata PM circa axem rotationis AD descripta, quae superficies si in Pp, seu in dx ducatur, erit $\frac{pxydx}{r}$ elementum cylindricum solidi indeterminati a plano APM geniti. Est vero $y = \sqrt{bx} = b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$: ergo hoc valore substituto erit idem elementum $= \frac{pb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{r}$.

Si iam elementum inuentum ducatur in $\frac{1}{2}y$, seu in sui centri distantiam a circulo radio AB descripto, erit $\frac{pb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}ydx}{2r} = \frac{pbx^2dx}{2r}$ (scilicet pro y ponendo $b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$) elementum summae momentorum, adeoque integrale eiusdem $\frac{pbx^3}{6r}$ erit summa momentorum solidi a plano APM geniti; etsi pro b substituatur $\frac{y^2}{x}$, erit eadem summa $= \frac{px^2y^2}{6r}$, quae si diuidatur per summam elementorum eiusdem solidi $\int(\frac{pb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{r}) = \frac{2pb^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5r}$, aut, si $\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$ pro $b^{\frac{1}{2}}$ substituatur, =

$\frac{2px^2y}{5r}$, quotus $\frac{5px^2y^2}{12px^2y} = \frac{5}{12}y$ erit diſtantia centri grauitatis dicti ſolidi a circulo radio AB deſcripto. Si ergo fiat $y = a$, erit $\frac{5}{12}a$ diſtantia centri grauitatis totius ſolidi rotatione plani ABE geniti ab eodem circulo.

376. PROBL. *Inuenire centrum grauitatis in ſolido, quod gignitur, dum idem planum ABE circa baſim BE rotatur.*

Reſol. Denuo manifeſtum eſt centrum grauitatis quaeſitum iacere in axe rotationis BE. Sit igitur BE $= a$, parameter parabolae genitricis $= b$, AB $= r$, peripheria radio AB deſcripta $= p$; abſciſſa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, cui ducta alia infinite propinqua erit P$p = dx$, PB $= r - x$, peripheria radio PB deſcripta $= \frac{pr - px}{r}$, quae ſi ducatur in PM, ſeu in y, erit $\frac{pry - pxy}{r}$ ſuperficies cylindrica ab ordinata PM circa axem rotationis BE genita, quae ſi porro ducatur in Pp, ſeu in dx, erit $\frac{prydx - pxydx}{r}$ elementum cylindricum ſolidi a plano APM geniti. Eſt vero $y^2 = bx$, ac differentiando $2ydy = bdx$, et $dx = \frac{2ydy}{b}$; quo valore ſubſtituto erit elementum ſupra inuentum $\frac{2pry^2dy - 2pxy^2dy}{br} = \frac{2pry^2dy}{br} - \frac{2py^4dy}{b^2r}$, ſcilicet pro x ponendo $\frac{y^2}{b}$.

Si iam elementum inuentum ducatur in $\frac{1}{2}y$, ſeu in diſtantiam ſui centri a circulo radio AB deſcripto, erit $\frac{pry^3dy}{br} - \frac{py^5dy}{b^2r}$ elementum ſummae momentorum, adeoque integrale eiusdem $\frac{pry^4}{4br} - \frac{py^6}{6b^2r}$ erit ſumma momentorum ſolidi a plano APM geniti: quae ſi diuidatur per ſummam elementorum eiusdem ſolidi $\int\left(\frac{2pry^2dy}{br} - \frac{2py^4dy}{b^2r}\right) = \frac{2pry^3}{3br} - \frac{2py^5}{5b^2r}$: quotus hinc enaſcens

$\left(\frac{6b^2pr^3y^4 - 4bpry^6}{24b^2r^2}\right) : \left(\frac{10b^2pr^2y^3 - 6bpry^5}{15b^2r^2}\right) = \left(\frac{3bpry^4 - 2py^6}{12b^2r}\right) : \left(\frac{10bpry^3 - 6py^5}{15b^2r}\right)$
$= \frac{45b^2pr^2y^4 - 30b^2pry^6}{120b^2pr^2y^3 - 72b^2pry^5} = \frac{45bry - 30y^3}{120br - 72y^2} = \frac{15bry - 10y^3}{40br - 24y^2} = \frac{15bry - 10bxy}{40br - 24bx}$
(nimirum pro y^2 ponendo bx) $= \frac{15ry - 10xy}{40r - 24x}$ erit distantia centri grauitatis dicti solidi a circulo radio AB descripto. Si ergo fiat $x = r$, erit hoc ipso $y = a$, et hinc $\frac{15ry - 10xy}{40r - 24x} = \frac{15ar - 10ar}{40r - 24r} = \frac{5ar}{16r} = \frac{5}{16}a$ erit distantia centri grauitatis totius solidi rotatione plani ABE geniti ab eodem illo circulo radio AB descripto.

377. PROBL. *Inuenire centrum grauitatis in solido, quod gignitur, dum planum ellipticum AMPQ circa axem AP rotatur.* Fig. 98.

Resol. Patet centrum quaesitum iacere in axe rotationis AP. Sit ergo axis transuersus ellipseos generantis $= a$ parameter $= b$, ratio radii circuli ad peripheriam $r : p$, abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit peripheria radio PM descripta $= \frac{py}{r}$, et circulus eodem radio ductus $= \frac{py^2}{2r}$, qui si multiplicetur per dx, erit $\frac{py^2dx}{2r}$ elementum solidi a plano AMPQ geniti. Est vero $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (Elem. 630): ergo hoc valore substituto erit idem elementum $= \frac{pbxdx}{2r} - \frac{pbx^2dx}{2ar}$.

Si iam elementum inuentum ducatur in suam a plano CD distantiam x, erit $\frac{pbx^2dx}{2r} - \frac{pbx^3dx}{2ar}$ elementum summae momentorum, adeoque integrale eiusdem $\frac{pbx^3}{6r} - \frac{pbx^4}{8ar}$ erit summa momentorum solidi a plano elliptico AMPQ geniti, quae si diuidatur per summam elementorum eiusdem solidi $\int\left(\frac{pbxdx}{2r} - \frac{pbx^2dx}{2ar}\right) = \frac{pbx^2}{4r}$

$-\frac{pbx^3}{6ar}$, quotus $\left(\frac{8aprbx^3 - 6prbx^4}{48ar^2}\right) : \left(\frac{6apbrx^2 - 4prbx^3}{24ar^2}\right) =$ $\left(\frac{4apbx^3 - 3pbx^4}{24ar}\right) : \left(\frac{3apbx^2 - 2pbx^3}{12ar}\right) = \frac{48a^2prbx^3 - 36aprbx^4}{72a^2prbx^2 - 48aprbx^3} = \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$ erit diſtantia centri grauitatis dicti ſolidi a plano CD, quae diſtantia ſi ſit $= c$, erit $c = \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$; vide $6a - 4x : 4a - 3x = x : c$, ſeu $a - \frac{2}{3}x : \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}x = x : c$.

378. *Coroll. 1.* Simili plane calculo eruitur diſtantiam centri grauitatis in ſolido, quod generatur plani hyperbolici circa axem rotatione, eſſe $= \frac{4ax + 3x^2}{6a + 4x}$.

379. *Coroll. 2.* Si in formula diſtantia centri grauitatis ſolidi elliptici pro x ponatur $\frac{1}{2}a$, erit $\frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x} = \frac{\frac{4}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{6a - \frac{4}{2}a} = \frac{\frac{5}{4}a^2}{4a}$ $= \frac{5}{16}a$, quae eſt diſtantia centri grauitatis dimidii ſphaeroidis elliptici a plano CD, ac proinde eadem, quam ſupra inuenimus in hemiſphaerio (371): nam ſi ibi ponatur $2r = a$, erit $\frac{5}{8}r = \frac{5}{16}a$.

380. *Coroll. 3.* Si fiat $x = a$, erit $\frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x} = \frac{4a^2 - 3a^2}{6a - 4a}$ $= \frac{a^2}{2a} = \frac{1}{2}a$, quae eſt diſtantia centri grauitatis totius ſphaeroidis ab eodem plano CD: eſt adeo id centrum in medio axe. Hinc ſi ſphaera, et ſphaeroides ellipticum axem communem habuerint, commune quoque habebunt grauitatis centrum.

CA-

CAPVT II.

De vſu Calculi Integralis in centro Percuſſionis, ac Oſcillationis inueſtigando.

381. Quemadmodum in quouis corpore quieſcente ineſt punctum aliquod, in quo omnia elementorum momenta veluti collecta intelliguntur, quod punctum centrum grauitatis dicitur: ita plane in quouis corpore moto ineſt punctum aliquod, in quo omnes elementorum vires, ſeu impetus quaſi collecti concipiuntur; ita vt quemadmodum circa grauitatis centrum omnia elementorum momenta, ita circa hoc punctum omnes eorundem vires, ſeu impetus ſint in aequilibrio. Punctum hoc adpellatur *centrum percuſſionis;* aut ſi corpus circa punctum aliquod fixum, vel circa axem agitetur, idem punctum vocatur etiam *centrum oſcillationis.*

Scholion. Dum figura quaepiam, aut corpus circa punctum, vel axem aliquem agitatur, centrum percuſſionis idcirco vocatur etiam centrum oſcillationis, quia ſi capiatur pendulum ſimplex eiusdem praeciſe longitudinis, quae eſt diſtantia centri percuſſionis a puncto, vel axe agitationis, eiusmodi penduli oſcillationes erunt iſochronae oſcillationibus illius figurae, vel corporis. E. g. Si agitetur triangulum aliquod circa ſuum verticem, reperiemus in ſequentibus diſtantiam centri percuſſionis a vertice aequari tribus quartis partibus axis eiusdem trianguli: ſi ergo quaereretur longitudo penduli ſimplicis, cuius oſcillationes iſochronae ſint oſcillationibus trianguli, deberet ea longitudo ſe habere ad axem trianguli vt 3 : 4, ſeu deberet aequari diſtantiae centri percuſſionis trianguli a vertice.

382. Si figura, vel corpus moveatur motu ſibi conſtanter parallelo, centrum percuſſionis idem omnino erit cum centro gra-

uitatis. Nam relate ad centrum grauitatis ſpectantur elementa tanquam ponduſcula aequalia ſine actuali celeritate: relate ad centrum percuſſionis ſpectantur eadem cum actuali celeritate, quae cum in hoc caſu eadem ſit in omnibus elementis, euidens eſt ſummam virium, ſeu impetuum circa centrum grauitatis vndique aequalem eſſe, ac proinde centrum percuſſionis congruere cum centro grauitatis. At ſi corpus circa punctum aliquod, vel axem fixum agitetur, tunc enimuero centrum percuſſionis a centro grauitatis diuerſum erit. Tunc enim elementa a puncto, vel axe oſcillationis inaequaliter diſtantia intra idem tempus inaequalia percurrent ſpatia. Quare adferenda iam eſt methodus determinandi in hoc caſu centrum percuſſionis.

383. *PROBL. Inuenire formulam generalem pro centro percuſſionis.*

Fig. 103. *Reſol.* Dum figura, vel corpus AB circa punctum fixum A oſcillans peruenit ad ſitum AC, vires, ſeu impetus ſingulorum eius elementorum coaleſcunt ex elementis ipſis ductis in ſuas celeritates, ſeu in arcus intra idem tempus decurſos. Si iam hi elementorum impetus ſpectentur tanquam totidem ponduſcula vecti AC adpenſa, et quaeratur centrum grauitatis eorundem, oportebit hos impetus ducere in ſuas diſtantias, et ſummam factorum diuidere per ſummam impetuum, quemadmodum capite ſuperiore vidimus: ergo ſumma momentorum virium, ſeu impetuum inſtar ponduſculorum ſpectatorum eſt factum ex ſumma elementorum in ſuas celeritates, ac deinde in ſuas diſtantias: et ſumma ipſarum virium eſt factum ex ſumma elementorum in ſuas celeritates. Atqui celeritates elementorum, ſeu arcus intra idem tempus decurſi, ſunt vt radii, ſiue vt diſtantiae a puncto, vel axe oſcillationis: ergo ſumma momentorum virium eſt factum ex ſumma elementorum in quadrata diſtantiarum, et ſumma virium

est factum ex summa elementorum in ipsas distantias eorundem a puncto, vel axe oscillationis: quare momentis virium in locum momentorum elementorum, et summa virium in locum summae elementorum substitutis, eo plane modo determinatur centrum percussionis, quo centrum grauitatis.

Sit ergo $AP = x$, $Mm = 2y$, erit elementum $MNnN = 2ydx$, vis eiusdem $= 2xydx$, momentum virium eiusdem $= 2x^2ydx$: quare si summa momentorum virium $\int 2x^2ydx$ diuidatur per summam virium $\int 2xydx$, obtinebitur distantia centri percussionis, seu centri grauitatis ipsorum impetuum a puncto A. Erit ergo $\frac{\int 2x^2ydx}{\int 2xydx} = \frac{\int x^2ydx}{\int xydx}$ formula generalis distantiae centri percussionis a puncto, vel axe oscillationis; seu erit formula generalis exhibens longitudinem penduli simplicis isochroni.

384. *Coroll.* Si ergo e data ad figuram quampiam, vel solidum aequatione valor quantitatis y eruatur, et in hac formula substituatur, facta de more integratione obtinebitur longitudo penduli simplicis isochroni, seu distantia centri percussionis a puncto, vel axe oscillationis, sicuti adparet e sequentibus.

385. *PROBL. Inuenire centrum percussionis in recta AB circa punctum sui extremum A oscillante.* Fig. 104.

Resol. Sit recta $AB = a$, pars eius quaecunque $AP = x$, $Pp = dx$, erit xdx vis elementi dx, seu elementum summae virium partis AP, et x^2dx erit momentum vis elementi dx, seu elementum summae momentorum virium eiusdem partis AP. Si ergo summa momentorum virium $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3$ diuidatur per summam virium $\int xdx = \frac{1}{2}x^2$, quotus $\frac{2}{3}x$ erit distantia centri percussionis partis AP a puncto A. Quare si pro parte AP accipiatur tota recta AB, seu si fiat $x = a$, erit $\frac{2}{3}a$ distantia centri percussionis totius rectae AB ab eodem puncto A.

Fig. 103. 386. PROBL. *Inuenire centrum percussionis in rectangulo quouis AC circa medium baseos punctum A oscillante.*

Resol. Ductis M*m* et N*n* infinite sibi propinquis sit $AP = x$, $MP = y$, erit $Pp = dx$, elementum M*mn*N $= 2ydx$, elementum summae virium $= 2xydx$, elementum summae momentorum virium $= 2x^2ydx$: quare si $\int 2x^2ydx = \frac{2x^3y}{3}$ diuidatur per $\int 2xydx = \frac{2x^2y}{2}$, quotus $\frac{2}{3}x$ erit distantia centri percussionis partis AP a puncto A. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{2}{3}a$ distantia centri percussionis totius rectanguli ab eodem puncto A. Porro centrum percussionis haerere in axe rectanguli AC perspicuum est.

Fig. 97. 387. PROBL. *Inuenire centrum percussionis in triangulo ABE circa axem CD basi BE parallelum oscillante.*

Resol. Facile adparet centrum quaesitum haerere in recta AG basim, seu totum triangulum bifariam secante. Sit ergo AD ad basim BE perpendicularis, ponaturque $AG = a$, $BE = b$, abscissa quaecunque $AP = x$, ordinata $MQ = y$, cui ducta alia mq infinite propinqua erit elementum areae MQ$qm = ydx$. Est autem in triangulis AMQ, ABE similibus $AP : MQ = AG : BE$, seu $x : y = a : b$, vnde $y = \frac{bx}{a}$, adeoque elementum $ydx = \frac{bxdx}{a}$: ergo elementum summae virium trianguli indeterminati AMQ erit $\frac{bx^2dx}{a}$, et elementum summae momentorum virium erit $\frac{bx^3dx}{a}$: quare si $\int \frac{bx^3dx}{a} = \frac{bx^4}{4a}$ diuidatur per $\int \frac{bx^2dx}{a} = \frac{bx^3}{3a}$, quotus $\frac{3}{4}x$ erit distantia centri percussionis trianguli indeterminati AMQ ab axe CD. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{3}{4}a$ distantia centri percussionis totius trianguli ABE ab eodem axe CD. Quare si fiat $An = \frac{3}{4}AG = \frac{3}{4}a$, et per punctum n ducatur np basi BE parallela, erit punctum p centrum quaesitum.

388. *Coroll.* 1. Breuius resoluetur idem problema ope formulae generalis supra (383) inuentae. Si enim valor ordinatae y inuentus, nempe $\frac{bx}{a}$, in formula generali substituatur, erit distantia centri percussionis trianguli AMQ ab axe CD $= \int(\frac{bx^3dx}{a}):\int(\frac{bx^2dx}{a}) = \frac{bx^4}{4a}:\frac{bx^3}{3a} = \frac{3abx^4}{4abx^3} = \frac{3}{4}x$, vt supra.

389. *Coroll.* 2. Si triangulum aequicrurum fuerit, axis AG congruet cum perpendiculari AD; adeoque si a vertice A inchoando ex axe resecentur tres quartae partes, centrum percussionis illico obtinebitur absque parallela np basi ducenda.

390. PROBL. *Inuenire centrum percussionis in triangulo aequicruro ABE circa basim BE oscillante.* *Fig.* 105.

Resol. Sit basi perpendicularis AD $= a$, basis BE $= b$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata QM $= y$, erit PD $= a - x$, et ob AD : BE $=$ AP : QM erit $y = \frac{bx}{a}$, et hinc elementum areae MQ$qm = ydx = \frac{bxdx}{a}$: ducatur hoc elementum in suam ab axe oscillationis BE distantiam $a - x$, erit $bxdx - \frac{bx^2dx}{a}$ elementum summae virium trianguli indeterminati AMQ; ac hoc elementum denuo ducendo in $a - x$ erit $abxdx - 2bx^2dx + \frac{bx^3dx}{a}$ elementum summae momentorum virium eiusdem trianguli. Quare si summa momentorum virium $\int(abxdx - 2bx^2dx + \frac{bx^3dx}{a}) = \frac{abx^2}{2} - \frac{2bx^3}{3} + \frac{bx^4}{4a}$ diuidatur per summam virium $\int(bxdx - \frac{bx^2dx}{a}) = \frac{bx^2}{2} - \frac{bx^3}{3a}$, quotus hinc enascens $\frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$ erit distantia centri percussionis dicti trianguli AMQ a basi BE. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{6a^2 - 8a^2 + 3a^2}{6a - 4a} = \frac{1}{2}a$ distantia centri percussionis

totius trianguli ABE ab eadem basi. Si ergo fiat DO $= \frac{1}{2}$ AD $= \frac{1}{2} a$, erit in O centrum quaesitum.

391. *Coroll.* Eadem distantia centri percussionis breuius inuenitur ope formulae generalis (383), si in eadem pro x ponatur $a - x$, et pro y ponatur $\frac{bx}{a}$, vti substituenti patebit.

Fig. 101. 392. *PROBL. Inuenire centrum percussionis in plano parabolico oscillante circa tangentem CD basi FE parallelam.*

Resol. Sit parameter parabolae $= p$, axis AB $= a$, abscissa quaecunque AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit elementum MQ$qm = 2ydx$, et hinc elementum summae virium plani indeterminati AMQ erit $= 2xydx$, ac elementum summae momentorum virium $= 2x^2ydx$; ac pro y ponendo $\sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, erit elementum prius $= 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx$, posterius $= 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx$: quare si summa momentorum virium $\int 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{4}{7}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}$ diuidatur per summam virium $\int 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$, quotus $\frac{4}{7}\frac{5}{4}x = \frac{5}{7}x$ erit distantia centri percussionis plani indeterminati AMQ a tangente CD. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{5}{7}a$ distantia centri percussionis totius plani parabolici AFE ab eadem tangente CD. Cum igitur id centrum haereat in axe AB, si fiat AO $= \frac{5}{7}$ AB $= \frac{5}{7}a$, erit in O centrum quaesitum.

393. *Coroll.* Eadem obtinetur centri distantia, si in formula generali $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx}$ pro y substituatur $\sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, vti substituenti patebit, id quod hactenus adnotasse sufficiat.

394. *PROBL. Inuenire centrum percussionis in eodem plano parabolico, circa basim FE oscillante.*

Resol. Sint omnia vt ante, erit $PB = a - x$, adeoque si elementum areae $2ydx$ ducatur in suam a basi distantiam $a - x$, erit $2aydx - 2xydx$ elementum summae virium plani indeterminati AMQ, et si hoc iterum ducatur in idem $a - x$, erit $2a^2ydx - 4axydx + 2x^2ydx$ elementum summae momentorum virium eiusdem plani: ac si pro y substituatur $\sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, erit elementum prius $= 2ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx$, elementum posterius $= 2a^2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - 4ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx + 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx$: quare si summa momentorum virium $\int(2a^2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - 4ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx + 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx) = \frac{4a^2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{8ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{7}$ diuidatur per summam virium $\int(2ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - 2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx) = \frac{4ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5}$, quotus

$$\left(\frac{140a^2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 168ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + 60p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{105}\right) : \left(\frac{20ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 12p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{15}\right)$$

$$= \left(\frac{140a^2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 168ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + 60p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{7}\right) : (20ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 12p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}})$$

$$= \frac{140a^2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 168ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + 60ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{140ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 84p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}} = \frac{35a^2 - 42ax + 15x^2}{35a - 21x}$$

erit distantia centri percussionis plani indeterminati AMQ a basi FE. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{35a^2 - 42a^2 + 15a^2}{35a - 21a} = \frac{8}{14}a = \frac{4}{7}a$ distantia centri percussionis totius plani AFE a basi FE. Cum ergo id centrum haereat in axe AB, si ex eodem a basi inchoando resecentur $\frac{4}{7}$ partes, obtinebitur centrum quaesitum.

395. PROBL. *Inuenire centrum percussionis in cylindro circa extremum axis punctum I oscillante.* *Fig.* 102.

Resol. Elementum cylindri $\frac{rpdx}{2}$ (367) ducatur in suam a puncto A distantiam x, erit $\frac{rpxdx}{2}$ elementum summae virium cylindri indeterminati ABML, et $\frac{rpx^2dx}{2}$ erit elementum summae momentorum virium eiusdem cylindri: quare si summa momentorum virium $\frac{\int rpx^2dx}{2} = \frac{rpx^3}{6}$ diuidatur per summam virium $\frac{\int rpxdx}{2} = \frac{rpx^2}{4}$, quotus $\frac{2}{3}x$ erit distantia centri percussionis dicti cylindri a puncto I. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{2}{3}a$ distantia centri percussionis totius cylindri ABCD ab eodem puncto I. Cum igitur id centrum iaceat in axe cylindri IK, si fiat IO $= \frac{2}{3}$ IK $= \frac{2}{3}a$, erit centrum quaesitum in O.

Fig. 88. 396. PROBL. *Inuenire centrum percussionis in cono circa verticem A oscillante.*

Resol. Cum elementum coni sit $= \frac{py^2dx}{2r}$, et $y = \frac{rx}{a}$ (368), erit idem elementum $= \frac{prx^2dx}{2a^2}$, quo per x multiplicato erit $\frac{prx^3dx}{2a^2}$ elementum summae virium coni indeterminati AEF, adeoque $\frac{prx^4dx}{2a^2}$ erit elementum summae momentorum virium eiusdem coni: si ergo summa momentorum virium $\frac{\int prx^4dx}{2a^2} = \frac{prx^5}{10a^2}$ diuidatur per summam virium $\frac{\int prx^3dx}{2a^2} = \frac{prx^4}{8a^2}$, quotus $\frac{4}{5}x$ erit distantia centri percussionis dicti coni a vertice A. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{4}{5}a$ distantia centri percussionis totius coni ABC ab eodem vertice A. Quare cum id centrum iaceat in axe coni AD, si a vertice inchoando resecentur in axe $\frac{4}{5}$ partes, obtinebitur centrum quaesitum.

397. PROBL. *Inuenire centrum percussionis in eodem cono circa diametrum baseos BC oscillante.*

Resol.

Resol. Sint omnia vt supra, erit $ID = a - x$: si ergo elementum coni $\frac{prx^2dx}{2a^2}$ ducatur in $a - x$, erit $\frac{prx^2dx}{2a} - \frac{prx^3dx}{2a^2}$ elementum summae virium coni indeterminati AEF; et si hoc elementum iterum ducatur in $a - x$, erit $\frac{prx^2dx}{2} - \frac{2prx^3dx}{2a} + \frac{prx^4dx}{2a^2}$ elementum summae momentorum virium eiusdem coni: si ergo summa momentorum virium $\int\left(\frac{prx^2dx}{2} - \frac{2prx^3dx}{2a} + \frac{prx^4dx}{2a^2}\right) = \frac{prx^3}{6} - \frac{prx^4}{4a} + \frac{prx^5}{10a^2}$ diuidatur per summam virium $\int\left(\frac{prx^2dx}{2a} - \frac{prx^3dx}{2a^2}\right) = \frac{prx^3}{6a} - \frac{prx^4}{8a^2}$, quotus hinc enascens $\left(\frac{40a^3prx^3 - 60a^2prx^4 + 24aprx^5}{240a^3}\right) : \left(\frac{8a^2prx^3 - 6aprx^4}{48a^3}\right) = \left(\frac{10a^2prx^3 - 15aprx^4 + 6prx^5}{60a^2}\right) : \left(\frac{4aprx^3 - 3prx^4}{24a^2}\right) = \frac{240a^2prx^3 - 360aprx^4 + 144prx^5}{240aprx^3 - 180prx^4} = \frac{20a^2 - 30ax + 12x^2}{20a - 15x}$ erit distantia centri percussionis dicti coni a baseos diametro BC. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{20a^2 - 30a^2 + 12a^2}{20a - 15a} = \frac{2a^2}{5a} = \frac{2}{5}a$ distantia centri percussionis totius coni ABC ab eadem diametro baseos BC. Cum igitur id centrum iaceat in axe coni AD, si fiat $DO = \frac{2}{5}AD = \frac{2}{5}a$, erit centrum quaesitum in O.

398. PROBL. *Inuenire centrum percussionis in sphaera circa tangentem GH tanquam circa axem oscillante.* *Fig. 89.*

Resol. Si elementum sphaerae $pxdx - \frac{px^2dx}{2r}$ (370) ducatur in x, erit elementum summae virium segmenti indeterminati $AQPM = px^2dx - \frac{px^3dx}{2r}$, ac elementum summae momentorum virium eiusdem segmenti $= px^3dx - \frac{px^4dx}{2r}$: quare si summa momentorum virium $\int\left(px^3dx - \frac{px^4dx}{2r}\right) = \frac{px^4}{4} - \frac{px^5}{10r}$ diuidatur per

summam virium $\int(px^2dx - \frac{px^3dx}{2r}) = \frac{px^3}{3} - \frac{px^4}{8r}$, quotus inde enascens $(\frac{10prx^4 - 4px^5}{40r}) : (\frac{8prx^3 - 3px^4}{24r}) = \frac{240prx^4 - 96px^5}{320prx^3 - 120px^4} = \frac{30rx - 12x^2}{40r - 15x}$ erit distantia centri percussionis segmenti AQPM a tangente GH. Si ergo fiat $x = 2r$, erit $\frac{60r^2 - 48r^2}{40r - 30r} = \frac{12r^2}{10r} = \frac{6}{5}r$ distantia centri percussionis totius sphaerae ab eadem tangente GH. Cum ergo id centrum haereat in diametro AB, si fiat AO $= \frac{6}{5}$ AC $= \frac{6}{10}$ AB, erit centrum quaesitum in O.

Fig. 98. 399. PROBL. *Inuenire centrum percussionis in sphaeroide elliptico circa tangentem CD tanquam circa axem oscillante.*

Resol. Si differentiale huiusmodi sphaeroidis $\frac{pbxdx}{2r} - \frac{pbx^2dx}{2ar}$ (377) ducatur in x, erit $\frac{pbx^2dx}{2r} - \frac{pbx^3dx}{2ar}$ elementum summae virium segmenti indeterminati AMQ, et $\frac{pbx^3dx}{2r} - \frac{pbx^4dx}{2ar}$ erit elementum summae momentorum virium eiusdem segmenti: quare si summa momentorum virium $\int(\frac{pbx^3dx}{2r} - \frac{pbx^4dx}{2ar}) = \frac{pbx^4}{8r} - \frac{pbx^5}{10ar}$ diuidatur per summam virium $\int(\frac{pbx^2dx}{2r} - \frac{pbx^3dx}{2ar}) = \frac{pbx^3}{6r} - \frac{pbx^4}{8ar}$, quotus inde enascens $(\frac{10arpbx^4 - 8rpbx^5}{80ar^2}) : (\frac{8arpbx^3 - 6rpbx^4}{48ar^2}) = (\frac{5apbx^4 - 4pbx^5}{40ar}) : (\frac{4apbx^3 - 3pbx^4}{24ar}) = \frac{120apbx^4 - 96pbx^5}{160apbx^3 - 120pbx^4} = \frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x}$ erit distantia centri percussionis segmenti AMQ a tangente CD. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{15a^2 - 12a^2}{20a - 15a} = \frac{3}{5}a$ distantia centri percussionis totius sphaeroidis ab eadem tangente CD. Cum ergo id centrum iaceat in axe transuerso ellipseos, obtinebitur, si ex eodem axe ab A incipiendo resecentur $\frac{3}{5}$ partes.

400. *Coroll.* Si fiat $\frac{1}{2}a = r$, erit $a = 2r$, et $\frac{3}{5}a = \frac{6}{5}r$: quare si sphaera, et sphaeroides ellipticum communem habeant axem a, et circa communem tangentem CD oscillent, commune quoque habebunt centrum percussionis (398).

401. *PROBL. Inuenire centrum percussionis in conoide parabolico circa tangentem CD osillante.*

Resol. Si conoidis elementum $\frac{pbxdx}{2r}$ (373) ducatur in x, erit $\frac{pbx^2dx}{2r}$ elementum summae virium conoidis indeterminati AMQ, et $\frac{pbx^3dx}{2r}$ erit elementum summae momentorum virium eiusdem conoidis: quare si summa momentorum virium $\int\frac{pbx^3dx}{2r} = \frac{pbx^4}{8r}$, diuidatur per summam virium $\int\frac{pbx^2dx}{2r} = \frac{pbx^3}{6r}$, quotus $\frac{3}{4}x$ erit distantia centri percussionis conoidis AMQ a tangente CD. Si ergo fiat $x = a$, erit $\frac{3}{4}a$ distantia centri percussionis totius conoidis ANE ab eadem tangente CD. Cum igitur id centrum iaceat in axe AB, obtinebitur, si ex axe AB ab A inchoando resecentur $\frac{3}{4}$ partes.

CAPVT III.

De vsu Calculi Integralis in legibus Attractionis inuestigandis.

402. Problemata, quae hoc loco proponimus, solui generatim possunt in quacunque attractionis, seu grauitatis vniuersalis hypothesi. Nos eadem restringemus ad legem attractionis vniuersalis inter duo quaeuis materiae elementa in ratione reciproca duplicata distantiarum agentis, quam legem in natura proxime obtinere satis ex physica certum est.

403. *PROBL. Data lege attractionis vniuersalis in ratione reciproca duplicata distantiarum agentis definire quantitatem attractio-* Fig. 106.

nis, quam linea recta AB homogenea exercet in punctum P in eadem producta collocatum.

Resol. Sumta recta PB pro asymptoto describatur hyperbola tertii gradus LNC, ducanturque ordinatae MN et *mn* infinite sibi propinquae, ac sit PM $= x$, erit $Mm = dx$, MN $= \frac{1}{PM^2} = \frac{1}{x^2}$, et attractio elementi Mm erit $= Mm . \frac{1}{PM^2} = \frac{dx}{x^2}$; atqui etiam area elementaris $MNnm$ est $= MN . Mm = \frac{1}{x^2} . dx = \frac{dx}{x^2}$: ergo attractionem elementi Mm exhibet area elementaris $MNnm$; quare eiusdem integrale $- \frac{1}{x} = - \frac{1}{PM}$, seu area LNMPK, aut si x desinat in A, area LDAPK $= - \frac{1}{PA}$ erit attractio rectae PA, et si fiat $x =$ PB, area LCBPK $= - \frac{1}{PB}$ erit attractio rectae PB; vnde attractio rectae AB est $=$ LCBPK $-$ LDAPK $= - \frac{1}{PB} + \frac{1}{PA}$.

Fig. 107. 404. PROBL. *Data eadem lege inuenire quantitatem attractionis circuli homogenei in punctum P collocatum in recta CP plano circuli in centro C perpendiculari.*

Resol. Sit circulus datus rotatione radii AC circa axem indefinitum PH genitus: radiis PR et Pr infinite sibi propinquis ducantur arcus RM et rm occurrentes axi PH in punctis M, et m; item radio PA ducatur arcus AD occurrens eidem axi in D. Circa axem PH tanquam asymptotum describatur hyperbola tertii gradus BEG, ac e punctis D, M, m erigantur ordinatae DE, MN, mn exhibentes attractiones in ratione reciproca duplicata distantiarum agentes. Sit porro PR $=$ PM $= x$, CR $= y$, erit OR $= dx$, R$r = dy$. Iam in triangulis ORr, PRC similibus erit PR : CR $=$ Rr : OR, seu $x : y = dy : dx$; vnde $ydy = xdx$.

Quaeratur iam attractio annuli ab elemento Rr circa axem PH conuerso geniti. Est hic annulus differentia circulorum radiis CR et Cr descriptorum; adeoque cum circuli sint vt quadrata radiorum, erit ea differentia, seu annulus vt $CR^2 - Cr^2$, seu vt $y^2 - (y - dy)^2 = y^2 - y^2 + 2ydy - dy^2 = 2ydy$, neglecto scilicet infinitesimo secundi gradus dy^2: erit ergo dictus annulus omissa constante 2 vt $ydy = xdx$.

Porro cum attractio elementi R$r = \frac{1}{PR^2} = \frac{1}{x^2}$ oblique agat in punctum P, resoluatur in duas, nempe in OR et Or, seu his proportionales CR et PC, quarum sola postrema PC tendit in circulum, adeoque sola quaerenda est: erit ergo attractio totalis PR seu x ad attractionem PC, vt $\frac{1}{x^2}$ ad $\frac{PC}{x^3}$, quae est attractio quaesita elementi Rr, et quae si ducatur in annulum xdx, habebitur attractio annuli $= \frac{PCdx}{x^2}$: quare si $\int \frac{dx}{x^2}$ ducatur in PC, habebitur attractio totius circuli radio CR descripti. Est vero $\int \frac{dx}{x^2} = \int (dx . \frac{1}{x^2}) = \int (Mm . MN) = - \frac{1}{x} + C = MNBC$, vbi vt constans adiicienda C reperiatur, aduertendum est aream MNBC euanescere, si x seu PM fiat $= PC$; vnde $- \frac{1}{PC} + C = 0$, adeoque $C = \frac{1}{PC}$: est adeo $\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{PC} - \frac{1}{x}$, seu $\frac{1}{PC} - \frac{1}{PM}$, quo in PC ducto erit $\int (\frac{PCdx}{x^2})$, seu attractio circuli radio CR descripti $= \frac{PC}{PC} - \frac{PC}{PM} = 1 - \frac{PC}{PM} = \frac{PM - PC}{PM} = \frac{MC}{PM}$: ac proinde attractio totius circuli radio CA descripti erit $= \frac{CD}{PD}$.

405. PROBL. *Data eadem lege inuenire quantitatem attractionis, quam exercet sphaera homogenea in punctum P extra eandem positum.* Fig. 108.

Resol. A dato puncto P ducantur duae secantes PK et PE sibi infinite propinquae, ac e punctis K et N ad diametrum AB demittantur perpendicula KL et NQ. Arculi infinitesimi ON et EK sua circa diametrum AB reuolutione generant annulos elementares ON.NQ et KE.KL, e quarum summa coalescit sphaerae superficies: igitur primum quaerendae sunt horum annulorum attractiones. Imprimis attractio arculi ON in punctum P, quae ex assumta lege est $= \frac{1}{PN^2}$ oblique agit in punctum P; quare resolui debet in duas PQ et QN, quarum sola PQ vrget punctum P versus arculum, adeoque sola quaerenda est: itaque vis absoluta erit ad relatiuam vt PN : PQ, seu vt $\frac{1}{PN^2} : \frac{PQ}{PN^3} = \frac{PN^{-2}.PQ}{PN}$, quae vis si in annulum ipsum ON.NQ ducatur, erit attractio huius annuli $= \frac{PN^{-2}.PQ.ON.NQ}{PN}$. Eodem plane modo obtinetur secundi annuli EK.KL attractio $= \frac{PK^{-2}.PL.EK.KL}{PK}$. Atqui demisso ad PK perpendiculo CD in triangulis similibus PNQ, PKL, PCD erit PN : PQ = PK : PL = PC : PD; vnde $\frac{PQ}{PN} = \frac{PL}{PK} = \frac{PD}{PC}$: ergo prioribus postremum substituendo erit attractio prioris annuli $= \frac{PN^{-2}.PD.ON.NQ}{PC}$, et posterioris $= \frac{PK^{-2}.PD.EK.KL}{PC}$.

Sit iam PA $= a$, PB $= b$, PN $= y$, PK $= x$, erit PA . PB = PN . PK (Elem. 423) seu $ab = xy$: erit item AB $= b - a$, AC $= \frac{b-a}{2}$, PC $= \frac{b-a}{2} + a = \frac{b+a}{2}$, NK $= x - y$, ND $= \frac{x-y}{2}$, PD $= \frac{x-y}{2} + y = \frac{x+y}{2}$. Quia vero $ab = xy$, erit $x = \frac{ab}{y}$, adeoque $\frac{x+y}{2} = \frac{ab}{2y} + \frac{y}{2} = \frac{ab+y^2}{2y} =$ PD. Praeterea in triangulis PNQ, PCD similibus est PC : CD = PN : NQ, seu

$\frac{b+a}{2} : CD = y : NQ$; vnde $NQ = \frac{2y.CD}{b+a}$. Item demiſſo ex N perpendiculo NI, et ducto radio NC, in triangulis INO, NDC rectangulis aequantur inſuper anguli INO, CND, qui remanent, ſi a rectis IND, ONC tollatur idem angulus DNO; quare haec duo triangula ſimilia ſunt, adeoque $CD : CN = IO : ON$, ſeu $CD : \frac{b-a}{2} = dy : ON$; vnde $ON = \frac{dy(b-a)}{2CD}$, et $ON.NQ = \frac{dy(b-a)}{2CD} . \frac{2y.CD}{b+a} = \frac{ydy(b-a)}{b+a}$. Eodem plane modo reperitur $EK.KL = \frac{xdx(b-a)}{b+a}$.

Quodſi ergo hi valores ſubſtituantur in attractionibus annulorum ſupra inuentis, erit $\frac{PN^{-2}.PD.ON.NQ}{PC} = \frac{y^{-2}.ydy(b-a)}{(b+a)^2} . \frac{2(ab+y^2)}{2y}$ $= \frac{(b-a)}{(b+a)^2} . (dy + aby^{-2}dy)$: ſimiliter $\frac{PK^{-2}.PD.EK.KL}{PC} = \frac{x^{-2}.xdx(b-a)}{(b+a)^2} . \frac{2(ab+x^2)}{2x} = \frac{(b-a)}{(b+a)^2} . (dx + abx^{-2}dx)$: ergo attractio annuli vtriusque ſimul erit $= \frac{(b-a)}{(b+a)^2} . (dy + ab\,y^{-2}dy + dx + abx^{-2}dx)$, in cuius integrali debet y eſſe negatiuum, cum decreſcat creſcente x, adeoque cum in functione integranda dy reapſe negatiuum ſit: erit igitur hoc integrale, ſeu attractio ſuperficiei ab arcu NOEK genitae $= \frac{(b-a)}{(b+a)^2} . (x + \frac{abx^{-1}}{-1} - y - \frac{aby^{-1}}{-1})$. Si ergo fiat $PN = PA = a$, et $PK = PB = b$, erit attractio ſuperficiei totius ſphaerae $= \frac{(b-a)}{(b+a)^2} . (b + \frac{a}{-1} - a + b)$ $= \frac{(b-a)}{(b+a)^2} . (2b - 2a) = \frac{2(b-a)^2}{(b+a)^2}$, ſeu erit in ratione compoſita ex directa duplicata diametri, et reciproca duplicata diſtantiae puncti P a centro ſphaerae C: ſeu omiſſa conſtanti ratione du-

plicata diametri ſphaerae erit in ratione reciproca duplicata diſtantiae a centro ſphaerae.

Denique cogitetur ſphaera coaleſcere e ſtratis homogeneis ſphaericis concentricis, ſitque diameter eiusmodi ſtrati indeterminati $b - a = u$, ac eius differentiale $= du$, erit $\frac{2(b-a)^2}{(a+b)^2} = \frac{2u^2}{(b+a)^2}$ attractio ſuperficiei vnius eiusmodi ſtrati, quae ſi ducatur in du, erit $\frac{2u^2du}{(b+a)^2}$ attractio ipſius ſtrati, ſeu elementi ſphaerae, cuius integrale, ſeu $\frac{2u^3}{3(b+a)^2} = \frac{2(b-a)^3}{3(b+a)^2}$ erit attractio totius ſphaerae, quae, omiſſa conſtante $\frac{2}{3}$, eſt in ratione compoſita ex directa triplicata diametri ſphaerae, et reciproca duplicata diſtantiae puncti P a centro ſphaerae, ſeu $= \frac{AB^3}{PC^2}$.

406. *Coroll.* Quoniam maſſa ſphaerae homogeneae M eſt vt cubus diametri, erit attractio ſphaerae $= \frac{M}{PC^2}$: et quia in eadem ſphaera M conſtans eſt, erit eiusdem attractio in punctum P in ratione reciproca duplicata diſtantiarum eiusdem puncti a centro ſphaerae.

407. *PROBL. Data eadem lege inuenire quantitatem attractionis, quam exercet ſphaera homogenea in punctum in ipſa ſphaerae ſuperficie poſitum.*

Reſol. Si punctum attractum ſit in ipſa ſphaerae attrahentis ſuperficie, erit AP, ſeu $a = o$, hinc $b - a$, ſeu diameter ſphaerae fit $= b$, et $\frac{2(b-a)^3}{3(b+a)^2}$ fit $= \frac{2b^3}{3b^2} = \frac{2}{3}b$: ergo omiſſa conſtante $\frac{2}{3}$ attractio erit in ratione directa diametri, vel radii ſphaerae, ſeu erit vt diſtantia puncti a centro ſphaerae.

408. PROBL. *Data eadem lege inuenire quantitatem attractionis, quam exercet sphaera caua homogenea in punctum P intra eius cauitatem positum.* Fig. 109.

Resol. Ducta per punctum P diametro AB, ducantur per idem punctum chordae NK et FE sibi infinite propinquae, ac ex punctis N et K demittantur in diametrum perpendicula NQ et KL, ac e centro C in chordam NK pariter perpendiculum CD, ac denique ducantur radii CN et CK, et radiis PN et PK arcus infinitesimi NO et KE. Sit porro AP $= a$, PB $= b$, PN $= y$, PK $= x$, erit AB $= b + a$, AC $=$ CN $= \frac{b+a}{2}$, PC $= \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}$, NK $= x + y$, ND $=$ DK $= \frac{x+y}{2}$, PD $=$ ND $-$ NP $= \frac{x-y}{2}$. Est vero AP . PB $=$ PN . PK, seu $xy = ab$, et hinc $x = \frac{ab}{y}$, adeoque PD $= \frac{x-y}{2} = \frac{ab-y^2}{2y}$: denique FO $= dy$, ME $= dx$.

Iam in triangulis NFO, NCD similibus est CD : NC $=$ FO : NF, seu CD : $\frac{b+a}{2} = dy$: NF; vnde NF $= \frac{bdy + ady}{2\text{CD}}$. Item in triangulis PQN, PCD similibus est PC : CD $=$ PN : NQ, seu $\frac{b-a}{2}$: CD $= y$: NQ; vnde NQ $= \frac{2y.\text{CD}}{b-a}$: erit ergo NF . NQ $= \frac{b+a}{b-a} ydy$; ac eodem modo reperitur KE . KL, seu KM . KL $= \frac{b+a}{b-a} xdx$. Est autem attractio annuli NF . NQ $= \frac{\text{PN}^{-2}.\text{PD.NF.NQ}}{\text{PC}}$, et attractio annuli KM . KL $= \frac{\text{PK}^{-2}.\text{PD.KM.KL}}{\text{PC}}$ (405): ergo substitutis valoribus superioribus erit attractio annuli prioris $= y^{-2}.\frac{(b+a)}{(b-a)^2} ydy . \frac{2(ab-y^2)}{2y} = \frac{b+a}{(b-a)^2}.(aby^{-2}dy - dy)$; et attra-

ctio annuli posterioris $= x^{-2} . \frac{(b+a)}{(b-a)^2} . xdx . \frac{2(x^2-ab)}{2x} = \frac{b+a}{(b-a)^2} . (dx - abx^{-2}dx)$.

Quia vero attractiones horum annulorum in plagas oppositas agunt, prior a posteriore subtrahenda est; ac proinde differentia earundem, qua sola vrgetur punctum P, erit $= \frac{b+a}{(b-a)^2} . (dx - abx^{-2}dx - aby^{-2}dy + dy)$, cuius integrale, cum crescente x decrescat y, seu dy reapse negatiuum sit, erit $= \frac{b+a}{(b-a)^2} . (x - \frac{abx^{-1}}{-1} + \frac{aby^{-1}}{-1} - y)$, quae est attractio superficiei ab arcu NAMK genitae. Si ergo fiat $y = a$, $x = b$, erit attractio totius superficiei sphaerae $= \frac{b+a}{(b-a)^2} . (b + a - b - a) = o$, seu attractio superficiei actionibus contrariis penitus eliditur.

Si ergo sphaera caua homogenea cogitetur constare meris stratis homogeneis concentricis, sitque vnius id genus strati indeterminati diameter $b + a = u$, erit attractio superficiei strati $= \frac{u(b+a-b-a)}{(b-a)^2} = \frac{bu+au-bu-au}{(b-a)^2}$, quae ducta in du dabit attractionem ipsius strati, seu elementi sphaerae $\frac{budu+audu-budu-audu}{(b-a)^2}$, cuius integrale est $= o$: id est, attractio sphaerae cauae homogeneae in punctum P nulla est, viribus scilicet contrariis sese prorsus elidentibus.

Fig. 110. 409. PROBL. *Data eadem lege inuenire quantitatem attractionis, quam exercet sphaera solida homogenea ADBE in punctum P intra sphaeram positum.*

Resol. Cogitetur sphaerae ADBE inscripta esse alia sphaera PMMO, in cuius superficie haereat punctum datum P: sphaera caua superficiebus concentricis ADBE, et PMMO comprehensa

nihil aget in punctum P (408): ergo punctum illud perinde attrahitur, ac si sphaera illa caua sublata iaceret in superficie sphaerae interioris PMMO; atqui tunc eius in sphaeram attractio esset in ratione directa radii PC, seu distantiae a centro sphaerae (407): ergo attractio totius sphaerae ADBE in punctum P intra ipsam vbicunque collocatum est in ratione directa distantiarum eiusdem puncti a centro sphaerae.

410. *PROBL. Data eadem lege inuenire quantitatem attractionis, seu vim acceleratricem, qua vna sphaera homogenea tendit in aliam, e.g. luna in tellurem supposita earundem homogeneitate.* Fig. 111.

Resol. Sit tellus in T, circulus AMB sectio lunae per centrum eiusdem C transiens; ducatur tangens quaecunque TM, ac ordinatae MQ et *mq* infinite sibi propinquae, radius item MC, ac recta MR ad AB parallela. Sit TC $= a$, TQ $= x$, MQ $= y$, MC $= r$, erit Qq = MR $= dx$, TM $= \sqrt{(TQ^2 + MQ^2)} = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, attractio arculi M$m$ in tellurem ex lege assumta $= \frac{1}{TM^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$: quia vero quantitas huius attractionis insuper est proportionalis massae trahenti T, erit eadem $= \frac{T}{x^2+y^2}$: quare posita semidiametro lunae $= 1$, et grauitate in eiusdem superficie itidem $= 1$, erit vis motrix, seu pondus arculi Mm coalescens e rationibus directis massarum trahentis et tractae, ac ex reciproca duplicata distantiarum, seu quod idem est, ex vi accelerante in massam attractam, erit inquam $= \frac{T.Mm}{x^2+y^2}$, quae vis designata per MT, quoniam oblique tendit in tellurem, resoluenda est in duas MQ, et QT, quarum sola posterior vrget arculum Mm versus tellurem, adeoque sola quaerenda est: erit igitur MT : QT $= \frac{T.Mm}{x^2+y^2} : \frac{QT.T.Mm}{MT(x^2+y^2)}$, seu $\sqrt{(x^2+y^2)} : x =$

$\frac{T.Mm}{x^2+y^2} : \frac{T.Mm.x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; eſt ergo $\frac{T.Mm.x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ pondus elementi Mm in tellurem; et ſi pro Mm ponatur $Mm.y$, ſeu annulus rotatione arculi Mm circa diametrum AB genitus, erit $\frac{T.Mm.y.x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ pondus eiusdem annuli in tellurem T.

Porro in triangulis MCQ, MRm ſimilibus eſt $MQ : MC = MR : Mm$, ſeu $y : r = dx : Mm$; vnde $Mm = \frac{rdx}{y}$: quo valore in ſuperiori ponderis expreſſione ſubſtituto erit pondus memorati annuli $= \frac{T.r.x.dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Eſt autem $AQ = TQ + AC - TC = x + r - a$, et $BQ = TC + BC - TQ = a + r - x$; et ex natura circuli $QM^2 = AQ.QB$, ſiue $y^2 = r^2 + 2ax - x^2 - a^2$, adeoque $x^2 + y^2 = r^2 + 2ax - a^2$, quo valore ſubſtituto erit pondus eiusdem annuli $= \frac{T.r.x.dx}{(r^2+2ax-a^2)^{\frac{3}{2}}}$, quod vt commodius integretur, fiat $r^2 + 2ax - a^2 = u^2$, erit differentiando $2adx = 2udu$, et hinc $dx = \frac{udu}{a}$: erit item $x = \frac{u^2+a^2-r^2}{2a}$, vnde $xdx = \frac{u^3du + u^2udu - r^2udu}{2a^2}$; quare $\frac{xdx}{(r^2+2ax-a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u^3du + a^2udu - r^2udu}{2a^2.(u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u^3du + a^2udu - r^2udu}{2a^2u^3} = \frac{du}{2a^2} + \frac{a^2du}{2a^2u^2} - \frac{r^2du}{2a^2u^2} = \frac{du}{2a^2} + \frac{a^2u^{-2}du}{2a^2} - \frac{r^2u^{-2}du}{2a^2}$, cuius integrale eſt $= \frac{u}{2a^2} - \frac{a^2}{2a^2u} + \frac{r^2}{2a^2u} + C = \frac{\sqrt{(r^2+2ax-a^2)}}{2a^2} \cdot \frac{-a^2+r^2}{2a^2\sqrt{(r^2+2ax-a^2)}} + C$, ſeu reducendo ad eundem denominatorem, ac per 2 diuidendo $= \frac{r^2+ax-a^2}{a^2\sqrt{(r^2+2ax-a^2)}} + C$: ſi porro hoc integrale ducatur in $T.r$, erit $\int\left(\frac{T.r.xdx}{(r^2+2ax-a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$, ſeu

pondus superficiei lunaris rotatione arcus AM genitae = $\frac{T.r(r^2+ax-a^2)}{a^2\sqrt{(r^2+2ax-a^2)}}+C$.

Vt iam constans C integrali adiicienda inueniatur, aduertendum est superficiem rotatione arcus AM genitam, ac proinde etiam eius pondus, seu integrale completum euanescere, si AQ, seu $r+x-a$ fiat $=o$, siue si fiat $a-r=x$: si ergo in reperto integrali pro x ponatur $a-r$, erit $\frac{T.r(r^2-ar)}{a^2\sqrt{(r^2-2ar+a^2)}}+C=o$; adeoque $\frac{T.r}{a^2}.\frac{(r^2-ar)}{a-r}+C=o$; vnde $C=\frac{T.r}{a^2}.\frac{(ar-r^2)}{a-r}=\frac{T.r^2}{a^2}$: ergo completum integrale, seu totum pondus memoratae superficiei lunaris est $=\frac{T.r^2}{a^2}+\frac{T.r(r^2+ax-a^2)}{a^2\sqrt{(r^2+2ax-a^2)}}$. Si ergo fiat TQ $=$ TB, seu $x=a+r$, erit pondus totius superficiei lunaris in tellurem $=\frac{T.r^2}{a^2}+\frac{T.r(r^2+ar)}{a^2\sqrt{(r^2+2ar+a^2)}}=\frac{T.r^2}{a^2}+\frac{T.r(r^2+ar)}{a^2(r+a)}=\frac{T.r^2}{a^2}+\frac{T.r^2}{a^2}=\frac{2T.r^2}{a^2}$.

Demum luna tota concipi potest coalescere ex innumeris stratis homogeneis concentricis: sit ergo vnius id genus strati indeterminati radius $=y$, erit $\frac{2T.r^2}{a^2}=\frac{2T.y^2}{a^2}$ pondus superficiei eiusdem strati, et $\frac{2T.y^2dy}{a^2}$ erit pondus ipsius strati, seu elementi lunaris, adeoque eiusdem integrale $\frac{2.T.y^3}{3a^2}=\frac{2T.r^3}{3a^2}$ erit pondus totius lunae in tellurem, quo diuiso per massam lunae, quae est vt r^3, erit omissa constante $\frac{2}{3}$ vis accelerans, seu attractio lunae in tellurem $=\frac{T}{a^2}$, ac omissa massa telluris pariter constante erit $=\frac{1}{a^2}$: hoc est, luna attrahitur a tellure in ratione reciproca duplicata distantiarum eiusdem centri a tellure.

411. *Coroll.* Igitur sphaera quaeuis homogenea ita attrahitur ab alia, ac si omnis sphaerae attractae massa in centro eiusdem collecta esset.

CAPVT IV.

De vsu Calculi Integralis in definiendis motibus a vi acceleratrice pendentibus.

Fig. 112. 412. PROBL. *Inuenire naturam curuae AMN, quam grauia non verticaliter vicunque proiecta in medio non resistente describunt.*

Resol. Sit in C telluris centrum, ad quod saltem ad sensum omnia grauia terrestria contendere ponimus, sit praeterea AB ea altitudo, e qua labendo corpus graue tantam praecise acquireret celeritatem, cum quanta proiicitur e. g. a puluere pyrio: describatur radio CA arcus indefinitus AQ, ducanturque radii CQ, et Cq infinite sibi propinqui, radiis item CM et Cm arcus MP, et mp, sitque BA $= a$, AP $= x$, AC $= r$, arcus AQ $= y$, erit Pp = MR $= dx$, Q$q = dy$, PC = MC = mC $= r - x$. Praeterea ob sectores CQq, CMm similes erit CQ : CM = Qq : Rm, seu $r : r - x = dy$: Rm; vnde R$m = \frac{(r-x)dy}{r}$, et R$m^2 = \frac{(r-x)^2 dy^2}{r^2}$: ergo M$m^2$ = MR^2 + R$m^2 = dx^2 + \frac{(r-x)^2 dy^2}{r^2} = \frac{r^2 dx^2 + (r-x)^2 dy^2}{r^2}$.

Sit porro celeritas, qua graue vrgetur per MR = Pp, seu quae labendo per AP acquireretur $= t$, et celeritas, qua motu composito per Mm fertur, seu quae labendo per BP acquireretur $= u$, cum per spatiola Mm, et MR motus pro aequabili haberi possit, erunt spatia intra idem tempus vt celeritates, seu MR : M$m = t : u$, id est, $dx : \sqrt{\left(\frac{r^2 dx^2 + (r-x)^2 dy^2}{r^2}\right)} = t : u$,

ac eleuando omnes terminos ad quadratum erit $dx^2 : \frac{t^2dx^2 + (r-x)^2dy^2}{r^2} = t^2 : u^2$, seu $r^2dx^2 : r^2dx^2 + (r-x)^2 dy^2 = t^2 : u^2$: ergo $u^2r^2dx^2 = r^2t^2dx^2 + (r-x)^2t^2dy^2$, et hinc $u^2r^2dx^2 - r^2t^2dx^2 = (r-x)^2 t^2dy^2$, adeoque extrahendo radicem quadratam $rdx\sqrt{(u^2 - t^2)} = t(r-x)dy$; ac proinde $dy = \frac{rdx\sqrt{(u^2-t^2)}}{t(r-x)}$.

Est vero celeritas labendo acquisita in ratione subduplicata altitudinis, per quam lapsus fit, seu $u = \sqrt{BP} = \sqrt{(a+x)}$, et $t = \sqrt{AP} = \sqrt{x}$: ergo valoribus hisce substitutis erit $dy = \frac{rdx\sqrt{(a+x-x)}}{(r-x)\sqrt{x}} = \frac{rdx\sqrt{a}}{(r-x)\sqrt{x}}$. Quia vero in iis a centro distantiis, in quibus grauium proiectiones peragi supponimus, directionis grauitatis pro parallelis haberi possunt, erit $r = \infty$, adeoque $r - x = r$, et hinc $dy = \frac{rdx\sqrt{a}}{r\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$, cuius integrale, seu y est $= 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{ax}$; adeoque $y^2 = 4ax$. Est ergo curua quaesita parabola, cuius parameter est $= 4a$.

413. *Coroll.* Quare parameter curuae traiectoriae, quam grauia terrestria oblique proiecta describunt, est quadrupla eius altitudinis, per quam labendo grauia eam acquirerent celeritatem, quacum proiiciuntur.

414. *PROBL. Si abscissa quauis AP tempus designante, ordinata correspondens PM denotet celeritatem interea acquisitam motu vtcunque accelerato, inuenire spatium.* Fig. 113.

Resol. Ducta ordinata pm priori PM infinite propinqua, sit abscissa AP $= t$, ordinata PM $= c$, erit P$p = dt$, ac elementum PM$mp = cdt$. Iam cum tempusculo dt motus pro aequabili possit haberi, erit spatiolum a mobili interea decursum in ratione composita celeritatis, et tempusculi, seu erit $= cdt =$ PMmp:

ergo huius integrale, seu area APM designabit spatium tempore AP decursum.

415. *Coroll.* Si motus fuerit vniformiter acceleratus, seu abscissae ordinatis proportionales, area APM erit triangulum: hinc vero nullo fere negotio deduci possunt pleraque theoremata, quae de lapsu grauium terrestrium vniformiter accelerato tradi solent in physica.

416. PROBL. *Si AB designante spatium a mobili motu vtcunque accelerato decursum, ordinatae AD, PQ etc. sint vt vires ad motum in punctis A, P etc. solicitantes; PM vero sit vt celeritas a mobili in P acquisita, inuenire celeritatem cuiuis spatii puncto respondentem.*

Resol. Ductis ordinatis PQ et pq infinite sibi propinquis, sit PQ $= v$, AP $= r$, PM $= c$, massa mobilis $= m$, erit P$p = dr$. Sit porro tempusculum, quo Pp decurritur $= dt$, quia motus per spatiolum Pp spectari potest vt aequabilis, in quo celeritas est vt spatium diuisum per tempus, erit $c = \frac{dr}{dt}$, et hinc $dt = \frac{dr}{c}$. Praeterea quantitas motus eodem tempusculo dt genita erit $= mdc$: cumque factum ex vi mouente in tempus actionis sit ipsa quantitas actionis, cui tanquam effectus respondet quantitas motus, erit $vdt = mdc$, et hinc $dt = \frac{mdc}{v}$; atqui supra fuit $dt = \frac{dr}{c}$: ergo $\frac{dr}{c} = \frac{mdc}{v}$, seu $vdr = mcdc$, est $\int vdr = \frac{1}{2}mc^2$; atqui $\int vdr = \int(\mathrm{PQ}qp) = $ APQD: ergo si mobile fuerit semper idem, seu m constans, erit $\frac{1}{2}c^2 = $ APQD, id est, dimidium quadratum, adeoque etiam integrum quadratum velocitatis erit vt area virium APQD.

Fig. 114. 417. PROBL. *Si vires AD, PQ etc. fuerint vt distantiae AC, PC etc. a puncto C, inuenire celeritatem in quouis spatii puncto P.*

Resol.

Resol. Cum sit ex hypothesi AD : PQ = AC : PC, area virium ACD erit triangulum, ac CD linea recta. Sit igitur AC $= a$, spatium descensus AP $= x$, PQ seu vis in puncto spatii P $= v$, erit PC $= a - x$: quia vero ex hypothesi PQ est vt PC, seu $v = a - x$, erit $\int v dx = \frac{1}{2} c^2$ (416) $= \int (adx - xdx)$ $= ax - \frac{1}{2} x^2$; vnde $2ax - x^2 = c^2$, et hinc $c = \sqrt{(2ax - x^2)}$: atqui si radio CA $= a$ describatur quadrans circuli AMK, erit PM $= \sqrt{(2ax - x^2)} = c$: ergo si centro C per locum A, vbi motus incepit, describatur quadrans circuli, celeritates in quouis spatii puncto erunt vt sinus arcuum correspondentium: seu celeritas in quouis spatii puncto erit vt ordinata circuli in eodem puncto.

418. *PROBL. In eadem hypothesi inuenire tempus descensus per quoduis spatium AC, PC etc. vsque ad punctum C.*

Resol. Quoniam per spatiolum Pp $= dx$ motus vt aequabilis spectari potest, erit $dx = cdt$; atqui c est $= \sqrt{(2ax - x^2)}$ (417), erit ergo $dx = dt \sqrt{(2ax - x^2)}$, et hinc $dt = \frac{dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Est vero in triangulis similibus PMC, MRm, PM : CM = MR : Mm, seu $\sqrt{(2ax - x^2)} : a = dx :$ Mm; vnde M$m = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$: quare hoc valore substituto in praecedenti aequatione erit $dt = \frac{Mm}{a}$, adeoque integrando $t = \int \frac{Mm}{a}$; hoc est, si fiat AP = AC, seu $x = a$, erit $t = \frac{AMK}{a}$. Eodem modo patet motu in puncto P incipiente tempus descensus per PC fore $= \frac{PHG}{a}$. Cum ergo ratio radii a ad quadrantem peripheriae constans sit, perspicuum est hac virium lege

obtinente mobile e quouis puncto A, P etc. eodem tempore descendere ad punctum C.

419. *Coroll.* Cum praesentem virium legem obtinere in motu per quosuis cycloidis arcus demonstrent mechanici, et nos in physica ostenderimus, facile adparet ex hoc problemate omnes oscillationes, quae fiunt per arcus cycloidis, aeque diuturnos esse: e quo deinde cetera ad pendulorum theoriam facientia vltro consequuntur.

Fig. 115. 420. PROBL. *Si mobile decurrat rectam Aa per centrum virium C non transeuntem, et motus incipiat in puncto A, inuenire eiusdem celeritatem in quouis spatii puncto B.*

Resol. E centro C, ad quod virium actio dirigitur, ducatur recta CA ad punctum A, in quo motus incipit, item alia recta CM ad Aa perpendicularis, sitque AM $= a$, CM $= b$, CB $= x$, erit BM $= \sqrt{(CB^2 - CM^2)} = \sqrt{(x^2 - b^2)}$. Sit porro vis vrgens mobile in puncto B directione BC $= v$, resoluaturque in duas, nempe in BM, et MC, elidetur pars MC a plano, vel a linea Aa, in qua mobile perpetuo detineri supponimus, solaque pars BM accelerabit eiusdem motum. Iam quia vis absoluta per BC est ad vim respectiuam per BM vt BC : BM $= x : \sqrt{(x^2 - b^2)}$, erit $x : \sqrt{(x^2 - b^2)} = v : \frac{v\sqrt{(x^2 - b^2)}}{x}$, quae est vis accelerans directione BM.

Sit porro AB $=$ AM $-$ BM $= a - \sqrt{(x^2 - b^2)} = r$, erit differentiando $dr = \frac{-x dx}{\sqrt{(x^2 - b^2)}}$: quare si in aequatione $\frac{1}{2}c^2 = \int v dr$ (416) pro vi, quae illic fuit $= v$, ponatur vis per BM,

quae hic est $= \frac{v\sqrt{(x^2-b^2)}}{x}$, et pro dr ponatur $\frac{-xdx}{\sqrt{(x^2-b^2)}}$, erit $\frac{1}{2}c^2 = \int(-vdx)$, hoc est, si fiat CP = CB, et circa axem AB describatur curua virium DQ, cuius scilicet ordinatae PQ repraesentent vires centrales v, erit in puncto B $\frac{1}{2}c^2$ = ADQP. Quare celeritas in puncto B descensu obliquo AB acquisita eadem est cum celeritate, quae in P descensu recto AP acquireretur, si puncta B et P a centro C aequaliter distent, ac idem sit virium accelerantium systema (416).

421. *Coroll.* Motus ergo a puncto A accelerabitur vsque in M, vbi vis accelerans BM euanescet. A puncto M versus b retardabitur ob directionem vis accelerantis bM contrariam, ac in distantia Ma = MA penitus exstinguetur. Deinde a puncto a mobile denuo regredietur versus A motu vsque ad M accelerato, tum retardato, ac in A exstincto: durabitque haec motuum inter puncta A et a reciprocatio in infinitum, si nulla adsint externa motus impedimenta.

422. PROBL. *Si mobile decurrat curuam NBG viribus vtcunque variantibus, ac versus centrum C tendentibus, inuenire celeritatem eiusdem in quouis puncto B.* Fig. 116.

Resol. Inchoetur motus in N, sitque celeritas in puncto B acquisita = c; centro C ducantur arcus NA, BP, bp, ita vt duo postremi sint sibi infinite propinqui. Porro circa axem AC descripta sit curua virium DQR, cuius scilicet ordinatae AD, PQ, repraesentent vires, quibus mobile in punctis datae curuae correspondentibus N, B, etc. versus centrum C vrgetur. Sit BT = V, et referat vim vrgentem mobile in puncto

B directione BC, resoluaturque in duas, nempe in BO ad curuam perpendicularem, et in OT tangentialem, seu parallelam, qua sola acceleratur motus in puncto B versus C, altera BO prorsus elisa, cum mobile perpetuo in curua detineri ponamus.

Sit praeterea Bb elementum infinitesimum curuae, et arcus bp continuetur vsque in I, vbi occurrat rectae BT; similia erunt triangula BOT, BIb, et hinc $Bb : BI = BT : OT = V : OT$; vnde $OT = \frac{V.BI}{Bb}$: quare si in aequatione $vdt = mdc$ (416) pro vi v hic substituatur vis $\frac{V.BI}{Bb}$, erit $\frac{V.BI.dt}{Bb} = mdc$. Atqui vis motrix V coalescit ex vi singulorum massae elementorum, quae sit $= v$, ducta in numerum elementorum, seu in massam m; quare $V = vm$, et hinc $\frac{vm.BI.dt}{Bb} = mdc$, seu $\frac{v.BI.dt}{Bb} = dc$, ac vtrinque per c multiplicando $\frac{v.BI.cdt}{Bb} = cdc$; atqui cdt aequatur spatiolo Bb, cum per illud motus pro aequabili haberi possit: ergo $v.BI = cdc = PQ.Qq$, adeoque $\int cdc = \int(PQ.Qq)$, id est $\frac{1}{2}c^2 = ADQP$. Eadem adeo est celeritas mobilis in puncto B lapsu curuilineo NB acquisita, quae in puncto P lapsu directo AP acquireretur (416).

Fig. 117. 423. *PROBL. Inuenire naturam curuae BMF, in qua mobile aequalibus temporibus aequaliter accedit ad horizontem EF, seu in qua tempora descensus sunt vt altitudines, per quas descenditur.*

Resol. Ductis ordinatis PM et pm infinite sibi propinquis, item recta MR verticali AE parallela, sit $BP = x$, $PM = y$, erit $MR = Pp = dx$, $Rm = dy$, $Mm = \sqrt{(MR^2 + Rm^2)} =$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit porro velocitas mobilis in puncto M acquisita $= c$; quia motus per arcum infinitesimum Mm vt aequabilis spectari potest, erit tempusculum, quo Mm decurritur, quod vocetur dt, vt spatium diuisum per celeritatem, seu $dt = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{c}$; est autem $c = \sqrt{BP} = \sqrt{x}$, et ex conditione problematis $dt = dx$: ergo $dx = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{x}}$, siue eleuando ad quadratum, et tollendo fractionem $xdx^2 = dx^2 + dy^2$, adeoque $xdx^2 - dx^2 = dy^2$, et $dx\sqrt{(x-1)} = dy$.

Vt iam inuenta expressio integrari possit, fiat $x - 1 = u$, erit $dx = du$, et $dx\sqrt{(x-1)} = u^{\frac{1}{2}}du = dy$: quare integrando erit $\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = y$, ac eleuando ad quadratum $\frac{4}{9}u^3 = y^2$ seu $u^3 = \frac{9}{4}y^2$. Est ergo curua BMF parabola cubica, cuius abscissa $= u$, ordinata $= y$, parameter $= \frac{9}{4}$.

424. *Coroll.* Cum sit $u^3 = (x-1)^3 = \frac{9}{4}y^2$, si fiat $y = 0$, erit $x - 1 = 0$, et hinc $x = 1$: quare initium abscissarum incipit supra parabolae verticem B, nempe in A si fiat $AB = 1$; eritque parameter parabolae $= \frac{9}{4}AB$. Quare si fiat $AB = a$, erit $AP = x$, $BP = a - x$: et quia c est $= \sqrt{x} = \sqrt{(AB + BP)}$, vt mobile iuxta legem propositam descendat in hac parabola, priusquam attingat verticem eiusdem B, debet acquirere velocitatem $\sqrt{AB}$, seu aduenire ad verticem B cum ea velocitate, quam acquireret labendo per $\frac{4}{9}$ parametri partes.

Fig. 118. 425. PROBL. *Inuenire tempus descensus per quemuis arcum cycloidis CB.*

Resol. Ducta recta CD diametro circuli genitoris AB perpendiculari, describatur supra diametrum DB semiperipheria DNB, ducanturque ordinatae PM et pm infinite sibi propinquae. Sit porro axis cycloidis, seu diameter circuli genitoris AB $= 2a$, diameter DB $= 2r$, abscissa DP $= x$, erit PB $= 2r - x$, Bp = Rm = dx, PN ex natura circuli $= \sqrt{(2rx - x^2)}$. Sit praeterea tempus descensus per arcum CM $= t$, erit tempus descensus per arculum Mm $= dt$. Iam cum celeritas per arcum CM acquisita aequetur celeritati, quae per DP acquireretur (422), erit illa $= \sqrt{DP} = \sqrt{x}$: et quia motus per arcum infinitesimum Mm pro aequabili haberi potest, erit spatiolum Mm $= dt\sqrt{x}$, et hinc $dt = \frac{Mm}{\sqrt{x}}$.

Porro tangens MT ducta ad punctum cycloidis M parallela est chordae correspondenti QB (59); quare triangula MRm, QBP similia sunt; vnde Mm : mR = QB : BP, et ex natura circuli AB : QB = QB : BP, et QB : BP $= \sqrt{AB} : \sqrt{BP}$ (Elem. 215), hinc Mm : mR $= \sqrt{AB} : \sqrt{BP}$, seu Mm : $dx = \sqrt{2a} : \sqrt{(2r - x)}$: quare M$m = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(2r-x)}}$, quo valore in aequatione superiore $dt = \frac{Mm}{\sqrt{x}}$ substituto erit $dt = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \frac{2rdx\sqrt{2a}}{2r\sqrt{(2rx - x^2)}}$. Est vero N$n$, seu differentiale arcus DN $= \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ (276): ergo $dt = \frac{Nn \cdot 2\sqrt{2a}}{2r}$, adeoque integrando $t = \frac{DN \cdot 2\sqrt{2a}}{2r}$, quod est tempus descensus per arcum CM.

Quodsi iam t designet tempus descensus per totum arcum CB, arcus DN abibit in semiperipheriam DNB, eritque tunc $t = \frac{DNB . 2\sqrt{2a}}{2r}$: quare cum $2\sqrt{2a}$ sit quantitas constans, quiscunque cycloidis arcus accipiatur, erit $t = \frac{DNB}{2r} = \frac{DNB}{DB}$. Eodem modo adparet tempus descensus per quemuis alium arcum GB esse $= \frac{AQB}{AB}$: sunt adeo tempora descensuum per quosuis cycloidis arcus vtcunque inaequales in ratione constanti semiperipheriae circuli ad diametrum: quare omnes cycloidis arcus GB, CB, MB etc. eodem tempore decurruntur.

426. *Coroll.* Cum tempus per arcum CB, seu t fuerit $= \frac{DNB . 2\sqrt{2a}}{2r}$, erit $2r : DNB = 2\sqrt{2a} : t$; atqui $2\sqrt{2a} = \frac{2\sqrt{2a}.\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}} = \frac{2 . 2a}{\sqrt{2a}} = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$: ergo $2r : DNB = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}} : t$. Est vero $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$ dimidium eius velocitatis, quae lapsu libero per $2a$, seu AB acquireretur, seu est ea velocitas, qua intra idem tempus, quo per diametrum laberetur, quod sit $= T$, motu aequabili percurreret eandem diametrum AB, seu $2a$; vnde $2a = T . \frac{1}{2}\sqrt{2a}$, seu $T = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$, quo valore substituto postrema proportio in hanc abibit $2r : DNB = T : t$: hoc est, tempus descensus per arcum cycloidis CB est ad tempus lapsus liberi per diametrum circuli genitoris, vt semiperipheria circuli ad diametrum: sunt adeo haec duo tempora in ratione constante; et quia T in eadem cycloide constans est, constans quoque erit t pro quouis cycloidis arcu. Denuo ergo adparet omnes cycloidis eiusdem arcus a puncto B computatos eodem tempore decurri.

Fig. 119. 427. PROBL. *Inuenire curuam brachystochronam AM, per quam scilicet corpus graue a dato puncto A ad datum punctum M breuissimo tempore perueniat.*

Resol. Ductis tribus ordinatis PM, pm, Nn infinite sibi propinquis, itemque perpendiculis Mr, mo, nF, sit abscissa AP $= x$, ordinata PM $= y$, erit Pp = Mr = mo = nF = dx, $mr = dy$, M$m = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit porro rF $= b$, erit mF $= r$F $- rm = b - dy$, et hinc $mn = \sqrt{(m\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}n^2)} = \sqrt{(b^2 - 2bdy + dy^2 + dx^2)}$. Iam cum motus per arculum Mm pro aequabili possit haberi, erit celeritas per spatiolum Mm eadem, quae in puncto M, vel P acquiritur, quaeque sit $= c$: similiter celeritas per arculum mn, quae sit = C, eadem erit, quae in fine arcus Am, vel abscissae Ap acquiritur. Denique sit tempus descensus per arcum AM $= t$, erit tempus per spatiolum M$m = dt$: cum ergo in motu aequabili spatia sint in ratione composita celeritatum et temporum, erit Mm, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = cdt$, adeoque $dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{c}$; similiter erit mn, seu $\sqrt{(b^2 - 2bdy + dy^2 + dx^2)} = \mathrm{C}dt$, et hinc $dt = \frac{\sqrt{(b^2 - 2bdy + dy^2 + dx^2)}}{\mathrm{C}}$, quae duo tempuscula simul addendo erit tempus descensus per arcum M$n = 2dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{c} + \frac{\sqrt{(b^2 - 2bdy + dy^2 + dx^2)}}{\mathrm{C}}$.

Cum ergo $2dt$ debeat ex hypothesi esse aliquod minimum, erit differentiando, ac dx pro constanti sumendo $\frac{dyddy}{c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} + \frac{dyddy - bddy}{\mathrm{C}\sqrt{(b^2 - 2bdy + dy^2 + dx^2)}} = 0$, seu vtramque fractionem per ddy diuidendo $\frac{dy}{c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} + \frac{dy - b}{\mathrm{C}\sqrt{(b^2 - 2bdy + dy^2 + dx^2)}} = 0$, et hinc $\frac{dy}{c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$

$\frac{dy}{c\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{b-dy}{C\sqrt{(b^2-2bdy+dy^2+dx^2)}}$, id est, $\frac{rm}{c.Mm} = \frac{mF}{C.mn}$. Fiat $Mm = mn$; seu $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ constans, erit $\frac{rm}{c} = \frac{mF}{C}$, seu $rm : mF$ seu $on = c : C$, id est differentialia ordinatarum sunt vt celeritates extremis ordinatarum punctis respondentes. Sit ratio constans horum differentialium ad celeritates vt $Mm : a$, et celeritas in $M = u$, erit $dy : u = Mm$ seu $\sqrt{(dx^2+dy^2)} : a$; vnde $ady = u\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ac eleuando ad quadratum $a^2dy^2 = u^2dx^2 + u^2dy^2$, et hinc $a^2dy^2 - u^2dy^2 = u^2dx^2$, adeoque $dy^2 = \frac{u^2dx^2}{a^2-u^2}$, et $dy = \frac{udx}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$. Est autem u, seu celeritas in M vel in P acquisita $= \sqrt{AP} = \sqrt{x}$; quare $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2-x)}}$, seu multiplicando per $\sqrt{x}$ erit $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2x-x^2)}}$: ac si constans a fit $= 1$, erit $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$.

Iam vero $\frac{xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$ est differentia inter $\frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$, et inter $\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$: ergo $\int dy = y = \int(\frac{xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}) = \int(\frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}) - \int(\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}) = \int(\frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}) - \sqrt{(ax-x^2)}$; atqui $\sqrt{(ax-x^2)} = PQ$ si AB fit $=a$, et $\int(\frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}})$ est arcus AQ (276): ergo $PM = y = AQ - PQ$; id est, in curua brachystochrona ordinata PM aequatur arcui correspondenti circuli habentis diametrum a demto sinu PQ eiusdem arcus.

Videndum ergo, cuinam curuae competat haec brachystochronae proprietas. Sit AMC semicyclois, sitque $AP = AP$ figurae praecedentis, erit ex natura cycloidis $MQ = CQ$, AD Fig. 120.

$= PM + MQ + QH = CQ + QD$: quare vtrinque tollendo aequalia MQ et CQ erit $PM + QH = QD$, et hinc $PM = QD - QH$, quae eſt proprietas brachyſtochronae paulo ante inuenta. Eſt adeo curua brachyſtochrona quaeſita cyclois, et a diameter circuli genitoris.

FINIS LIBRI SECUNDI.



ERRATA

		Errata		Corrigenda
Pag. 15.	Lin. vlt.	*adde* :		positiuum, decrescentis
17.	Lin. penult.	Qm	- - -	QM
18.	Exempl. 9.	$uxyzdu$,	- - -	$uxyzdt$
131.	Exempl. 2.	*adde*		$\frac{1}{5}bf^2x^5$
132.	Exempl. 7.	$\frac{m+n}{m}$	- - -	$\frac{m-n}{m}$
141.	Lin. 5.	$125a^{12}$	- - -	$125a^{14}$
194.	Lin. 4.	*omittatur*	- - -	$\frac{ydx}{dy}$.
219.	Lin. 6.	MNnN		MmnN
236.	Lin. 15.	u^2udu	- - -	a^2udu

In Fig. 23. recta QT producenda est vsque in A, et ibi ponendus curuae vertex.

In Fig. 81. addantur literae P, *p*, O. In Fig. 92. lit. Q. In Fig. 118. lit. T.

Tab. I.

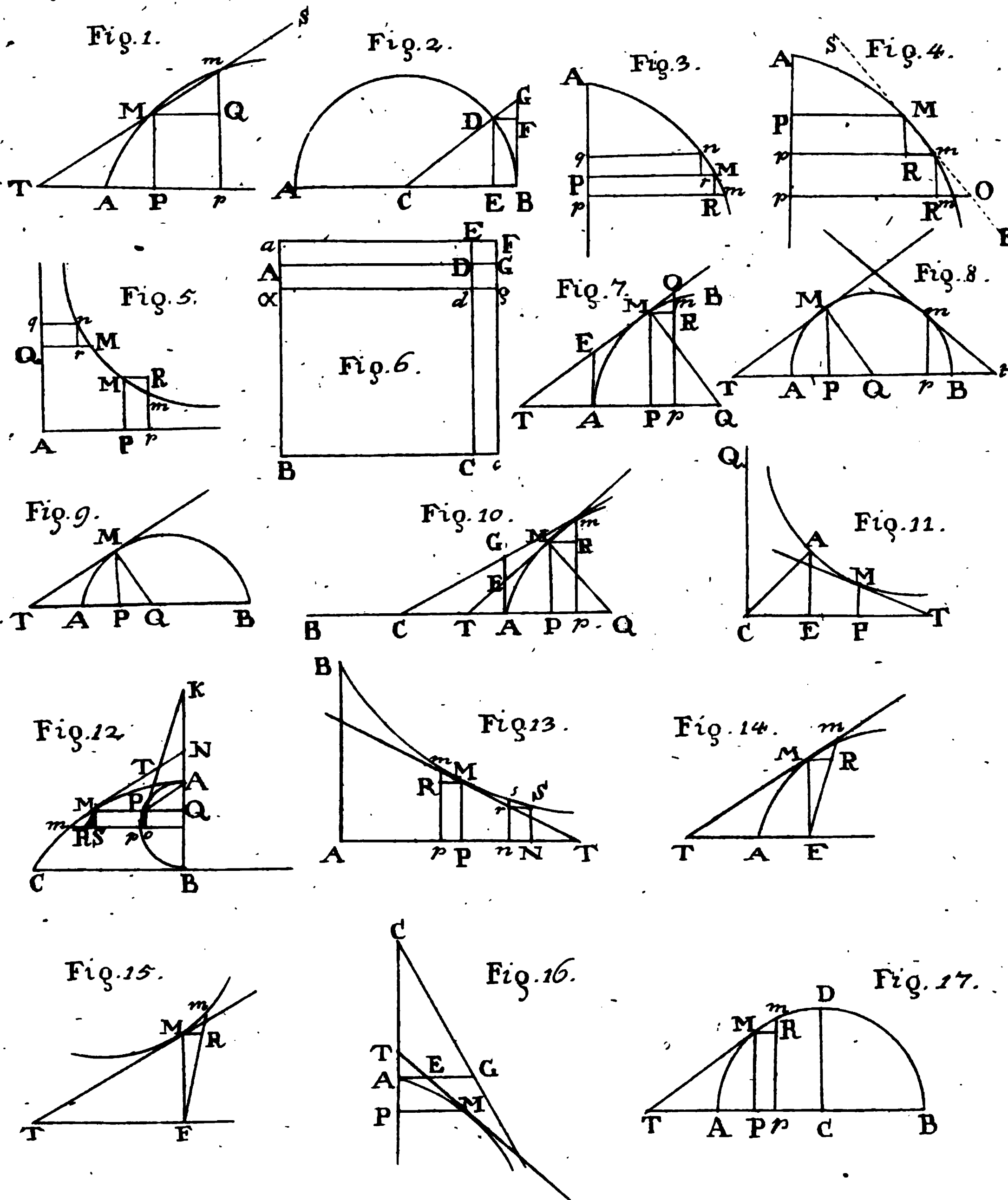
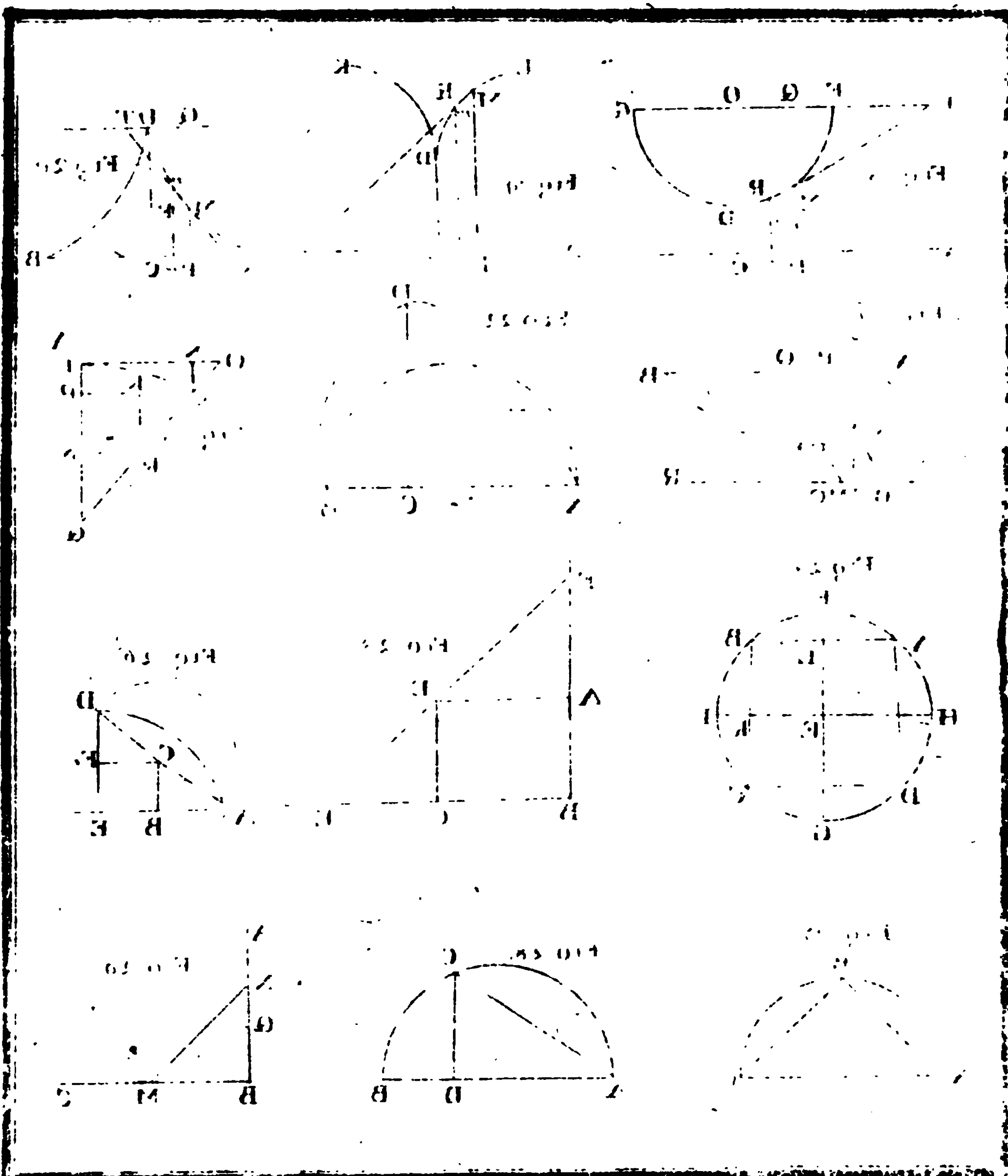

Fig. 1.
T A P p M Q m S
Fig. 2.
A C E B D G F
Fig. 3.
A q P p n M r m R
Fig. 4.
A S P p p M m R R m O F
Fig. 5.
q Q n r M M R m A P r
Fig. 6.
a A α E F D G d g B C c
Fig. 7.
E M O m B R T A P p Q
Fig. 8.
M m T A P Q p B t
Fig. 9.
M T A P Q B
Fig. 10.
G M m R E B C T A P p Q
Fig. 11.
Q A M C E F T
Fig. 12.
K N T A M P Q m R S p o C B
Fig. 13.
B m M R s S r A p P n N T
Fig. 14.
M m R T A F
Fig. 15.
M m R T F
Fig. 16.
C T E G A M P
Fig. 17.
D M m R T A P p C B

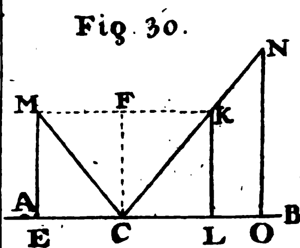
Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20.

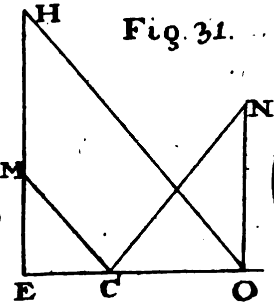
Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23.

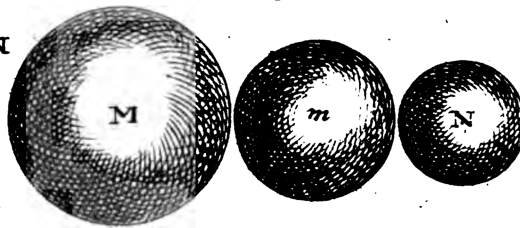
Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26.

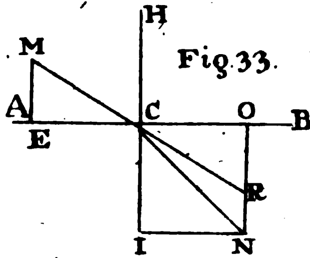
Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.

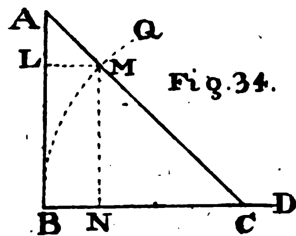


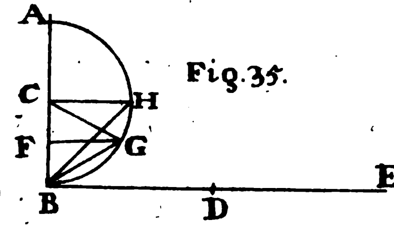

Fig. 30.
M
F
N
K
A
E
C
L
O
B

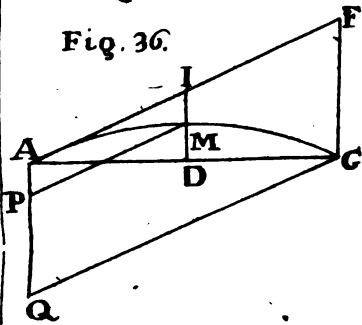

H
Fig. 31.
N
M
E
C
O

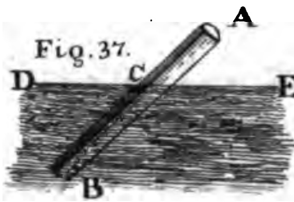

Fig. 32.
M
m
N

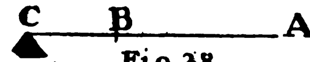

H
M
Fig. 33.
A
C
O
B
E
R
I
N

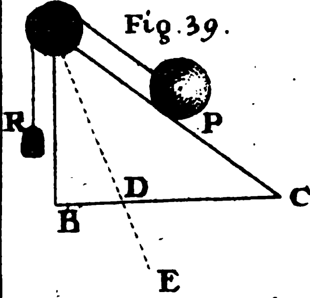

A
Q
L
M
Fig. 34.
B
N
C
D

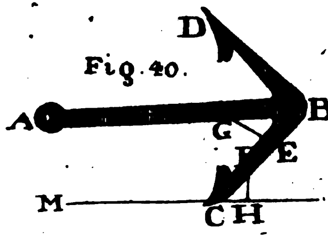

A
Fig. 35.
C
H
F
G
B
D
E

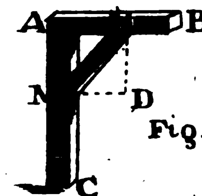

Fig. 36.
F
I
A
M
C
D
P
Q

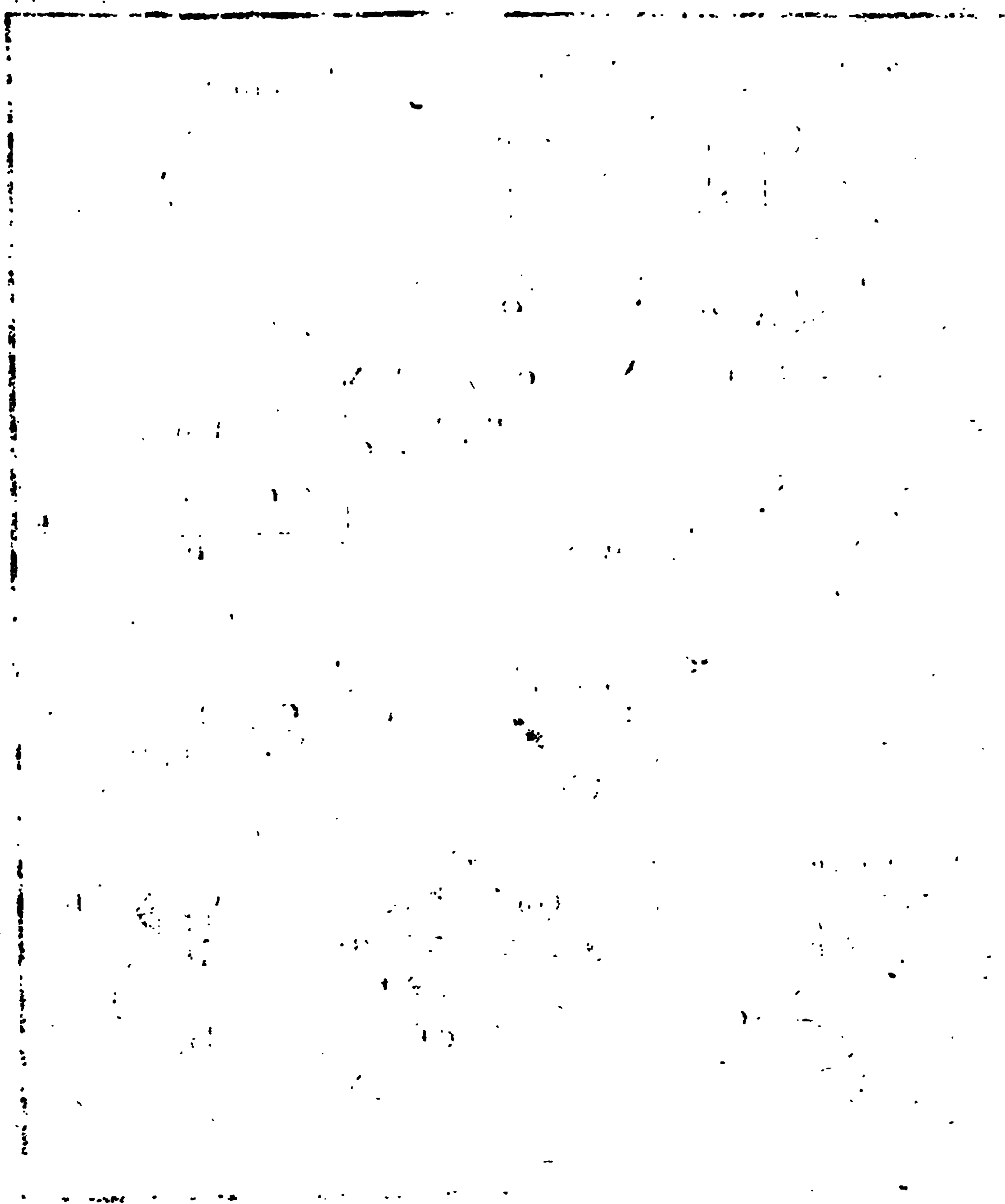

A
Fig. 37.
D
C
E
B


C
B
A
Fig. 38.


Fig. 39.
R
P
D
C
B
E


D
Fig. 40.
A
B
G
E
M
C
H


A
B
N
D
Fig. 41.
C



Tab. IV.

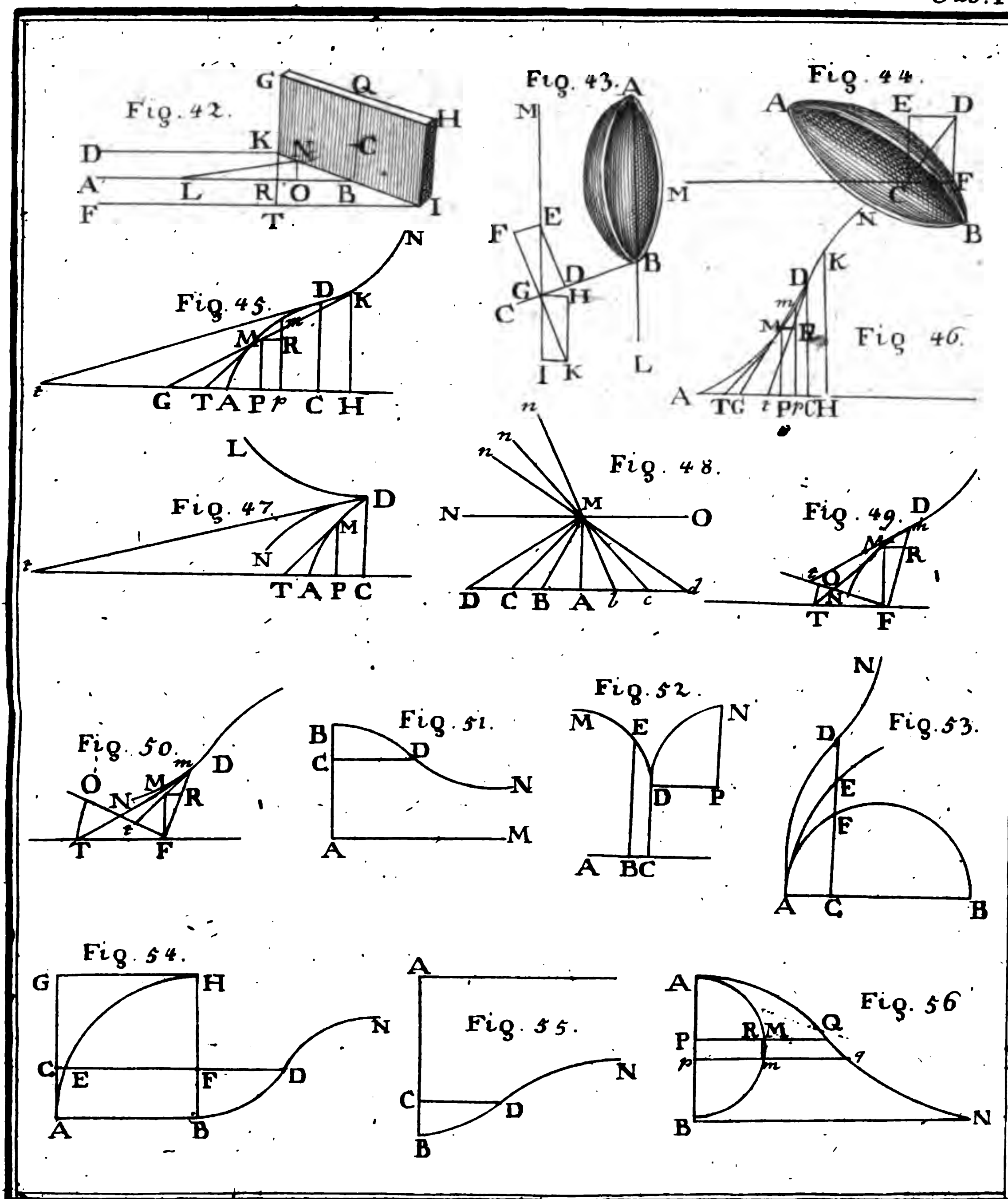
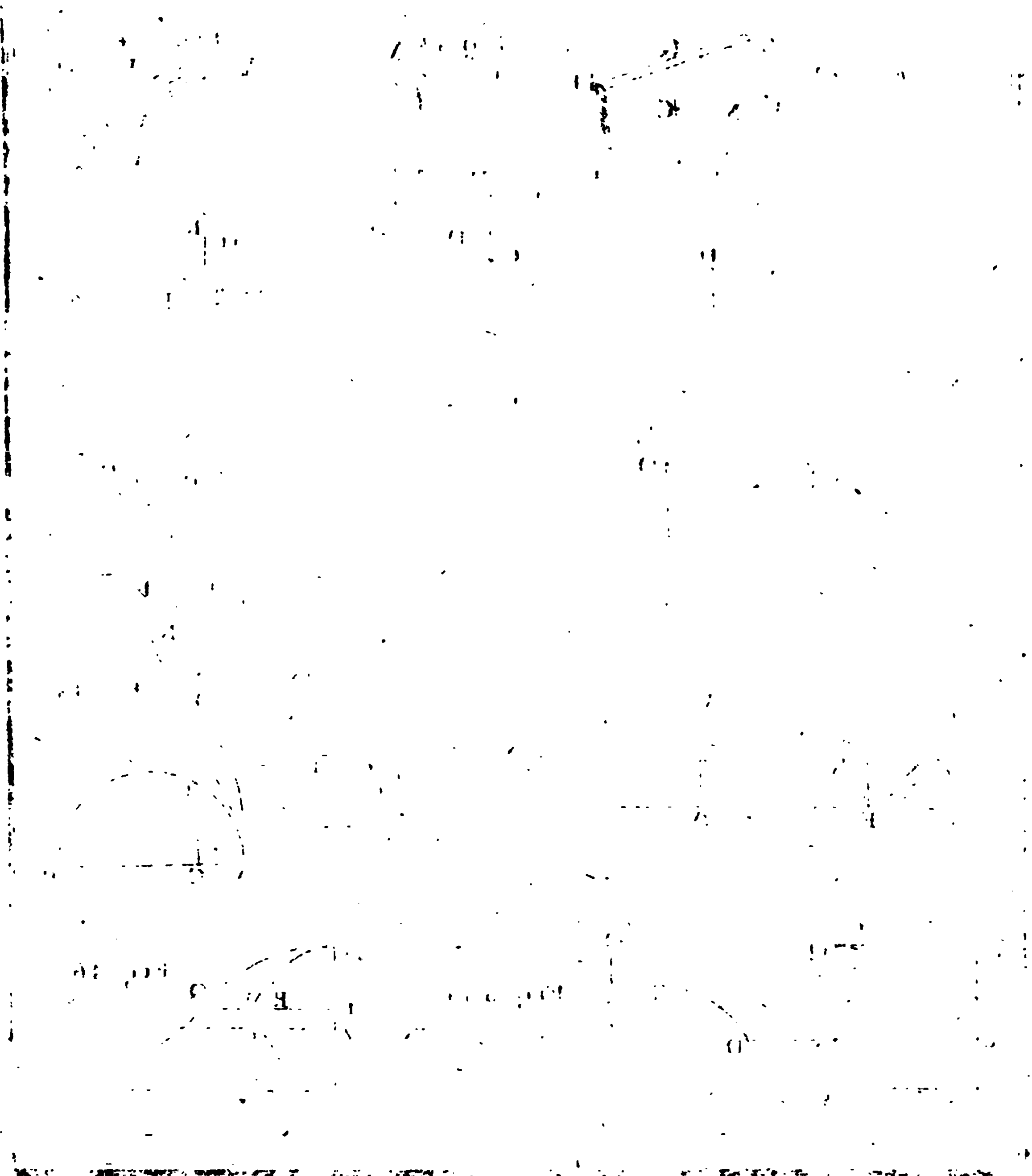
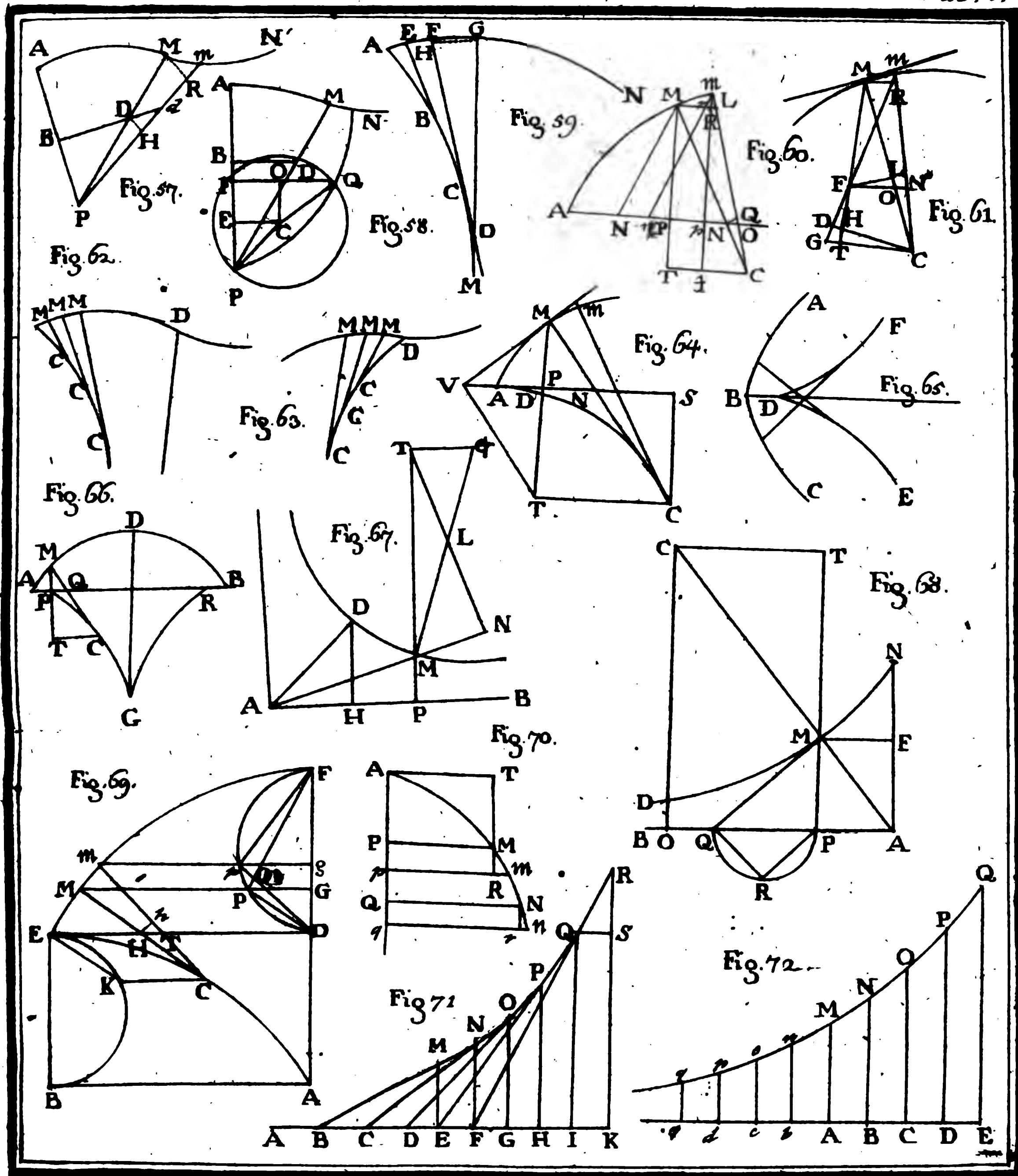
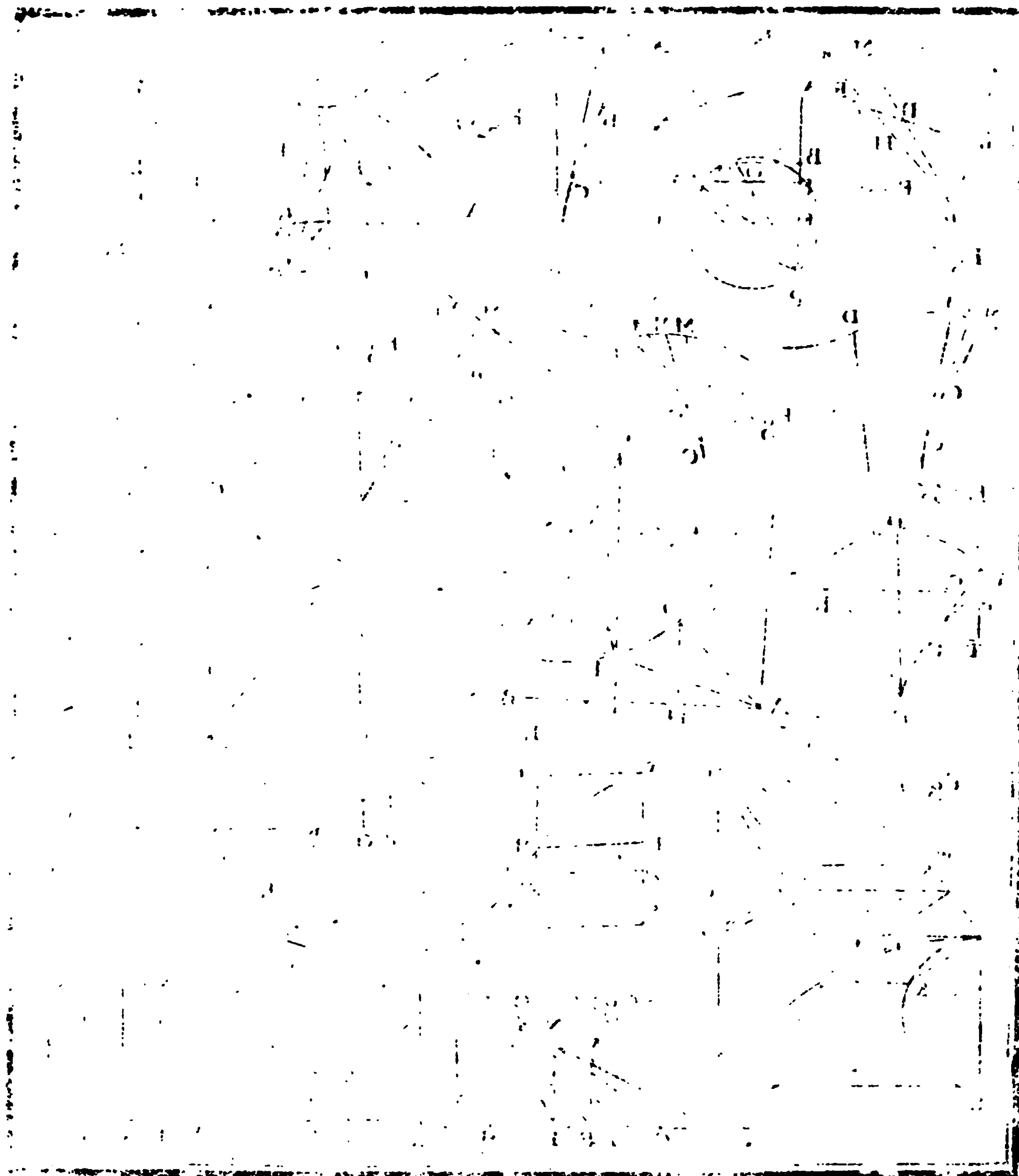
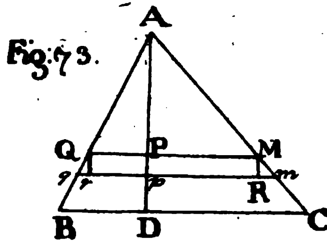


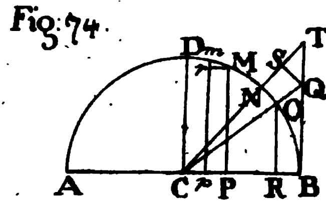
Fig. 42.
G Q H K N C D A L R O B F T I
Fig. 43.
A M E F D G H C B I K L
Fig. 44.
A E D M C F N B
Fig. 45.
N D K M m R t G T A P p C H
Fig. 46.
K D m M R A T G t P p C H
Fig. 47.
L D M N t T A P C
Fig. 48.
n n n N M O D C B A b c d
Fig. 49.
D m M R t O N T F
Fig. 50.
O N M m D R T t F
Fig. 51.
B C D N A M
Fig. 52.
M E N D P A B C
Fig. 53.
N D E F A C B
Fig. 54.
G H C E F D N A B
Fig. 55.
A C D N B
Fig. 56.
A P R M Q p m q B N

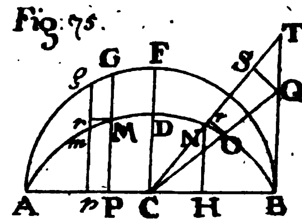


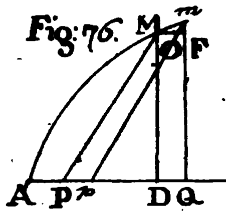

Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71
Fig. 72.

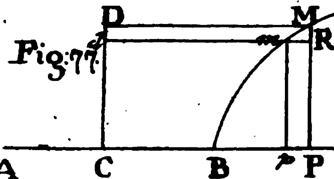


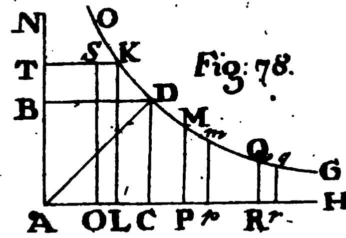

Fig. 73.
A
Q P M
q r p m
R
B D C

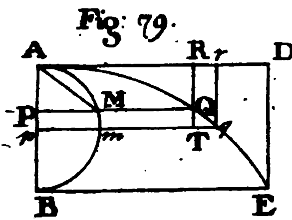

Fig. 74.
D m M S T
r N Q
O
A C p P R B

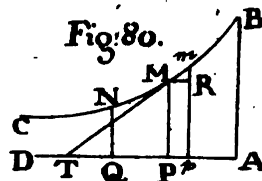

Fig. 75.
g G F S T
Q
r M D N r O
m
A p P C H B

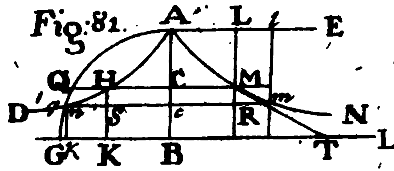

Fig. 76.
M m
O F
A P p D Q

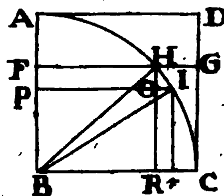

Fig. 77.
D M
q m R
A C B p P

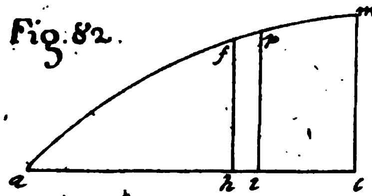

N O
S K
T
Fig. 78.
B D
M
m
Q q G
A O L C P p R r H

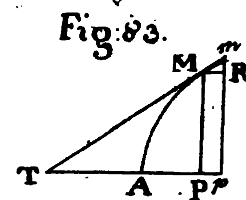

Fig. 79.
A R r D
P M Q
p m T q
B E

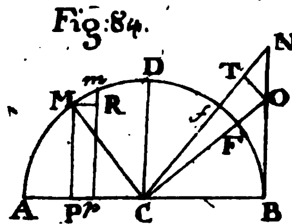

Fig. 80.
B
M m
N R
C
D T Q P p A

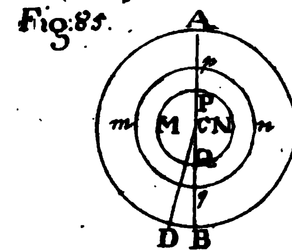

Fig. 81.
A L l E
Q H C M
D q h S c R m N
G K K B T L

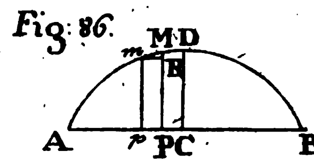

A D
F H G
P O I
B R r C

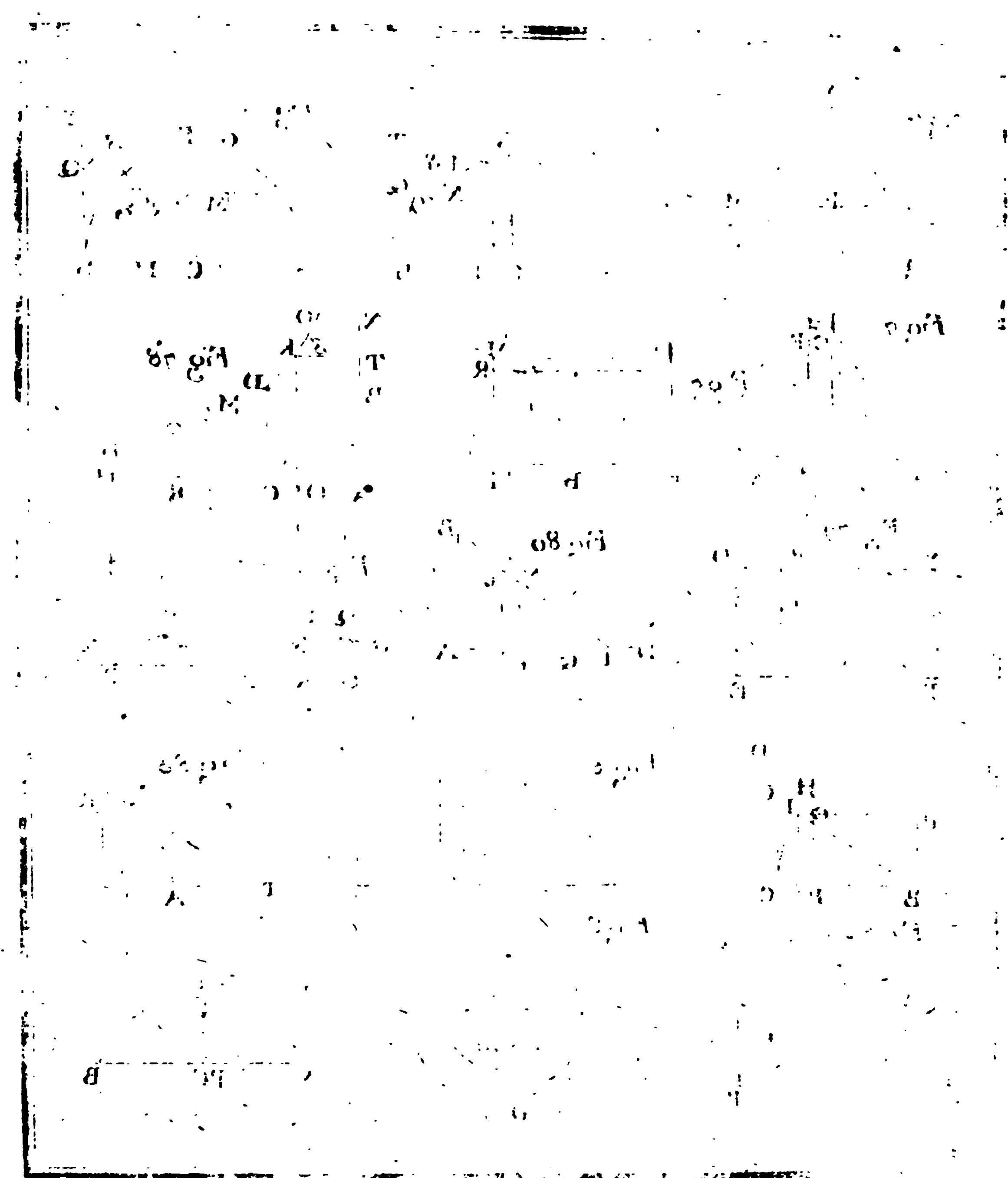

Fig. 82.
m
f p
a h i c

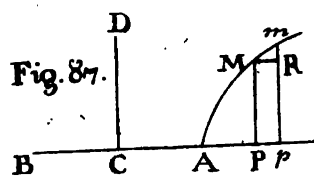

Fig. 83.
M m
R
T A P p

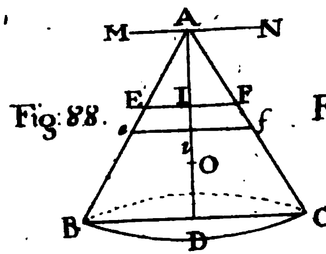

Fig. 84.
D N
M m T
R O
f
F
A P p C B

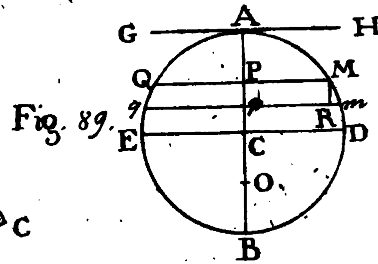

Fig. 85.
A
p
P
m M C N n
Q
q
D B

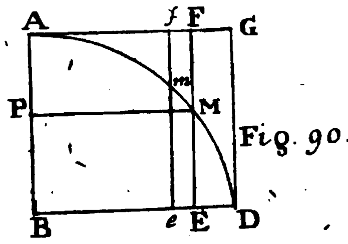

Fig. 86.
m M D
E
A p P C B

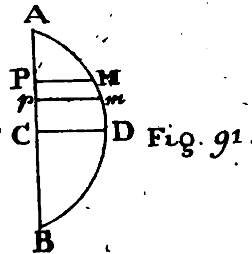


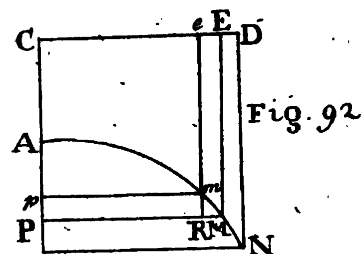


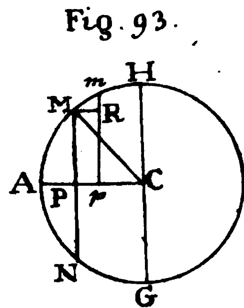


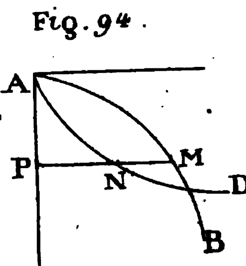


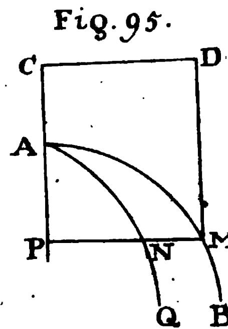


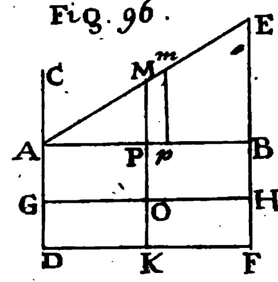


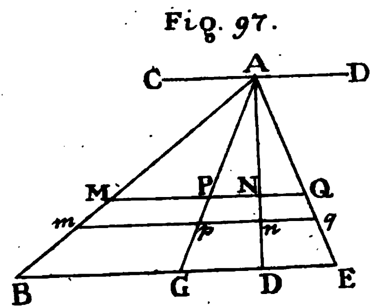


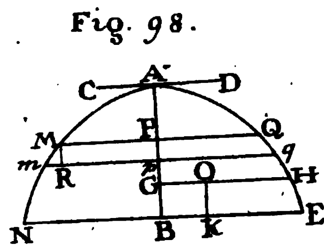


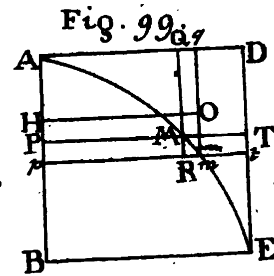




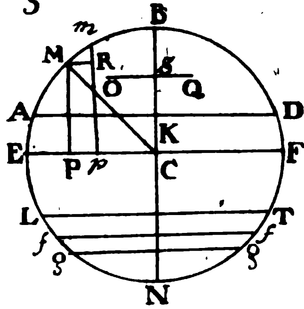


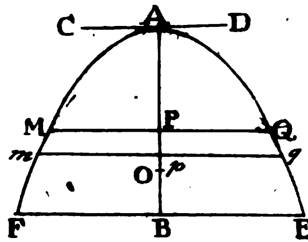


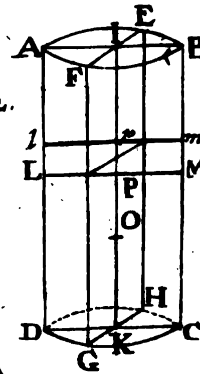


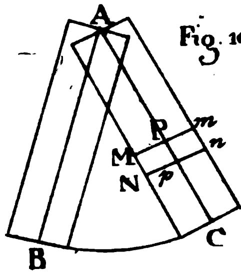


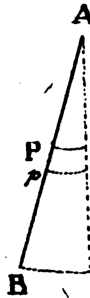
P. Macko, Calc. diff. Instit.

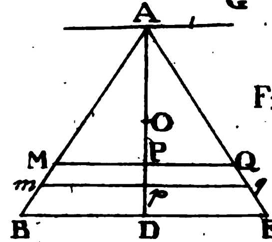


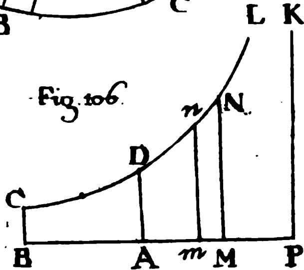


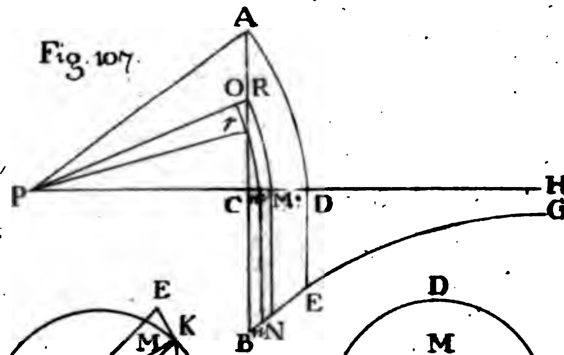


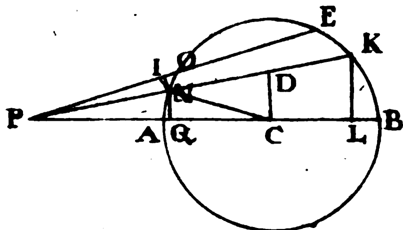


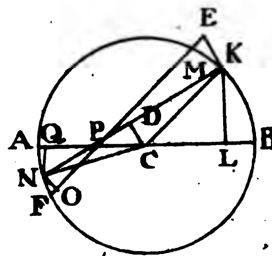


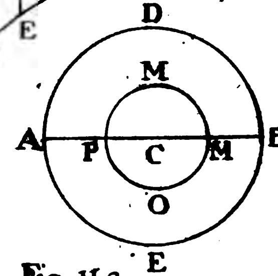












P. Macko, Calc. diff. Instit.